

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2016/2017

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: II

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                       |
|-----------------------------------------|-----------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Analiza matematyczna  |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Mathematical analysis |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WFMiI M oIIS B1 16/17 |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty podstawowe |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 10.00                 |
| SEMESTRY                                | 1                     |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 1       | 60     | 60        | 0            | 0                                | 0          | 0       |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studentów z podstawowymi faktami teorii miary i całki Lebesgue'a; przestrzeń  $L_p$ .

**Cel 2** Formy różniczkowe oraz ich całkowanie.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczony pierwszy stopień studiów matematycznych.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student poznaje podstawy teorii miary, miary i całki Lebesgue'a i przestrzenie  $L_p$ .

**EK2 Umiejętności** Student potrafi sprawdzać czy dane odwzorowanie jest miarą, mierzalność zbiorów i funkcji, stosować twierdzenie Fubiniego i twierdzenie o zmianie zmiennych. Student umie stosować poznane fakty do obliczania całek wielokrotnych, całek z form różniczkowych i uzasadniać poprawność wykonywanych operacji.

**EK3 Wiedza** Student poznaje formy różniczkowe, działania na formach i ich własności oraz ich całkowanie na podrozmiarowościach  $R_n$ .

**EK4 Umiejętności** Student potrafi wykonywać podstawowe działania na formach różniczkowych, obliczać całki z form różniczkowych na podrozmiarowościach  $R_n$  (szczególnie całki krzywoliniowe i powierzchniowe) oraz znać ich zastosowania.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD     |                                                                                                                  |                  |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                           | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b>  | Definicja sigma ciała - własności i przykłady.                                                                   | 2                |
| <b>W2</b>  | Miara i jej własności.                                                                                           | 2                |
| <b>W3</b>  | Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego                                                                   | 3                |
| <b>W4</b>  | Miara Lebesgue'a, charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.                                       | 3                |
| <b>W5</b>  | Funkcje mieralne, warunki równoważne, przykłady.                                                                 | 2                |
| <b>W6</b>  | Działania na funkcjach mieralnych.                                                                               | 2                |
| <b>W7</b>  | Funkcje proste i ich całkowanie, własności całek z funkcji prostych.                                             | 4                |
| <b>W8</b>  | Funkcje mieralne nieujemne jako granice rosnących ciągów funkcji prostych, całka z funkcji mieralnej nieujemnej. | 3                |
| <b>W9</b>  | Podstawowe własności całek z funkcji mieralnych nieujemnych.                                                     | 2                |
| <b>W10</b> | Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou.                             | 2                |
| <b>W11</b> | Całka Lebesgue'a, definicja i własności.                                                                         | 2                |
| <b>W12</b> | Twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym i o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.            | 2                |
| <b>W13</b> | Związek Całki Riemanna z całką Lebesgue'a, zasada Cavalieriego.                                                  | 2                |

| WYKŁAD     |                                                                                                                                                      |                  |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                               | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W14</b> | Twierdzenia: Tonelly'ego i Fubinięgo.                                                                                                                | 2                |
| <b>W15</b> | Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a.                                                                                                  | 2                |
| <b>W16</b> | Odwzorowania p-liniowe znakovienne, działania algebraiczne i iloczyn zewnętrzny, baza przestrzeni odwzorowań p-liniowych znakoviennych i jej postać. | 3                |
| <b>W17</b> | Formy różniczkowe stopnia p - własności, postać kanoniczna i klasa.                                                                                  | 3                |
| <b>W18</b> | Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej i jej własności.                                                                                             | 2                |
| <b>W19</b> | Zmiana zmiennych w formie różniczkowej.                                                                                                              | 2                |
| <b>W20</b> | Pierwotna formy różniczkowej, twierdzenie Poincarego.                                                                                                | 3                |
| <b>W21</b> | Całka krzywoliniowa zorientowana i jej obliczanie oraz zastosowania, niezależność od drogi całkowania.                                               | 3                |
| <b>W22</b> | Orientacja podrozmaitości $R_n$ , twierdzenie Greena - Riemanna.                                                                                     | 3                |
| <b>W23</b> | Całka powierzchniowa zorientowana i jej związek z całką powierzchniową niezorientowaną, Twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego.               | 3                |
| <b>W24</b> | Twierdzenie Stokesa, elementy teorii pól wektorowych.                                                                                                | 3                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                                    |                  |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                             | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b> | Sprawdzanie czy dana rodzina jest sigma-ciałem, wyznaczanie własności sumy, przecięcia sigma -ciał, pierścienie, sigma-pierścienie, ciała podzbiorów danego zbioru | 2                |
| <b>C2</b> | Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą, wykorzystanie własności miary przy dowodzeniu własności nie podanych na wykładzie, miary liczące, atomowe                 | 3                |
| <b>C3</b> | Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą zewnętrzną, konstruowanie miar przy pomocy twierdzenia Caratheodoryego, zupełność                                          | 3                |
| <b>C4</b> | Wykazywanie własności m-wymiarowa miary zewnętrznej Lebesguea, zbiór Cantora, zbiór Vitaliego                                                                      | 2                |
| <b>C5</b> | Sprawdzanie mierzalności funkcji względem danego sigma-ciała, konstruowanie sigma-ciał generowanych przez funkcje                                                  | 2                |
| <b>C6</b> | Działania na funkcjach mierzalnych                                                                                                                                 | 2                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |                  |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             | LICZBA<br>GODZIN |
| C7        | Przypomnienie wiadomości o szeregach liczbowych, całkowanie funkcji prostej nieujemnej, całka funkcji Dirichleta, całka funkcji skokowej Heavisidea, własności całki funkcji prostej                                                                                                                                                                                                                                                                               | 4                |
| C8        | Całkowanie funkcji mierzalnej nieujemnej, konstruowanie ciągu aproksymującego funkcję mierzalną nieujemną w przypadku przestrzeni ciągów oraz przestrzeni funkcji rzeczywistych                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 3                |
| C9        | Badanie całkowalności funkcji, wykorzystanie warunku koniecznego na całkowalność oraz warunku wystarczającego                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2                |
| C10       | Zastosowanie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, zastosowanie lematu Fatou                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2                |
| C11       | Całka Lebesguea                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2                |
| C12       | Zastosowanie twierdzenia Lebesguea o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      | 2                |
| C13       | Wykorzystanie związku całki Riemanna z całką Lebesguea, wykorzystanie sum całkowych Riemanna do wyznaczania sum szeregów, wykorzystanie zasady Cavalieriego, geometryczna interpretacja całki funkcji nieujemnej                                                                                                                                                                                                                                                   | 2                |
| C14       | Zastosowania twierdzeń: Tonellyego i Fubiniiego                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 2                |
| C15       | Zamiana zmiennych w całce Lebesguea                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                | 2                |
| C16       | Przypomnienie własności odwzorowań liniowych i wieloliniowych, sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest p-liniowe znakozmienne, struktura przestrzeni $Ap(E;F)$ , mnożenie zewnętrzne odwzorowań wieloliniowych znakozmiennych i wykorzystanie jego własności, obliczanie iloczynu zewnętrznego k-form liniowych, wyznaczanie bazy przestrzeni $Ap(R_k; R)$ , wykorzystanie domkniętości przestrzeni $Ap(R_k; R)$ , przestrzeń $Ap(R_k; R)$ jako przestrzeń unitarna | 2                |
| C17       | Sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest formą różniczkową, postać kanoniczna                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                        | 2                |
| C18       | Wykonywanie operacji na formach różniczkowych: iloczyn zewnętrzny, różniczka zewnętrzna, zmiana zmiennych w formie różniczkowej                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 4                |
| C19       | Wyznaczanie pierwotnej formy, badanie zamkniętości formy, wykorzystanie twierdzenia Poincarego                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                     | 2                |
| C20       | Przypomnienie definicji łuku, krzywej, podrozmaitości jednowymiarowej, badanie zgodności orientacji krzywej z wyborem parametryzacji, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej, wykorzystanie niezależności od parametryzacji krzywej, całkowanie formy różniczkowej zamkniętej, cykl, badanie czy krzywe są homotopijne, zbiór p-spójny, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej jako granicy ciągu sum całkowych, zastosowanie całki krzywoliniowej   | 3                |

| ĆWICZENIA  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                  |
|------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                   | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C21</b> | Podrozmaitości orientowalne, wstęga Möbiusa, sprawdzanie czy dany zbiór jest kompaktem, kompaktem z brzegiem, kompaktem z brzegiem na podrozmaitości, sprawdzanie zgodności orientacji, obliczanie całki formy różniczkowej stopnia drugiego w przestrzeni $R^2$ , zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna, obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej | 3                |
| <b>C22</b> | Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej                                                                                                                                                                                                                                                                                                              | 3                |
| <b>C23</b> | Definicja całki formy różniczkowej stopnia trzeciego w $R^3$ , zastosowania twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego                                                                                                                                                                                                                                                                                                    | 3                |
| <b>C24</b> | Zastosowania twierdzenia Stokesa, wyznaczanie dywergencji, rotacji, gradientu pola                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       | 3                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady

**N2** Zadania tablicowe

**N3** Konsultacje

**N4** Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 120                                                     |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 40                                                      |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 10                                                      |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 80                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 0                                                       |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 0                                                       |
| przygotowanie do egzaminu                                                                        | 50                                                      |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>300</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 10.00                                                   |

## 9 SPOSOBY OCENY

Obok obowiązkowej obecności warunkiem otrzymania zaliczenia z ćwiczeń jest uzyskanie co najmniej 50

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Kolokwium

**F2** Odpowiedź ustna

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Egzamin pisemny

**P2** Egzamin ustny

**P3** Średnia ważona ocen formujących

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

**W2** Egzamin składa się z części pisemnej i części ustnej.

**W3** Ocena końcowa jest średnią ważoną ocen P1, P2, P3.

### KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.                                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 3.0        | Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady.                                                                                  |
| NA OCENĘ 3.5        | Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń.                                                                      |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania.                                                  |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych.                                                                         |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń.                                                                                                     |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 2.0        | Student w niedostatecznym stopniu dostrzega możliwość wykorzystywania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.                                                                                                             |
| NA OCENĘ 3.0        | Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.                                                                                                                              |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić. Potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.                                                                                  |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.                                |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.             |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady. |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.                                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 3.0        | Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady.                                                                                  |

|                     |                                                                                                                                                                                                                                      |
|---------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.5        | Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń.                                                                      |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania.                                                  |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych.                                                                         |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń.                                                                                                     |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 2.0        | Student w niedostatecznym stopniu dostrzega możliwość wykorzystywania podstawowych pojęć z zakresu wyłożonego materiału.                                                                                                             |
| NA OCENĘ 3.0        | Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału.                                                                                                                              |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić. Potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.                                                                                  |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.                                |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady.             |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi bezbłędnie, w mowie i na piśmie, wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz potrafi konstruować przykłady i kontrprzykłady. |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                                                                                        | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|
| EK1               | K_W02 K_W05<br>K_U07                                                           | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8<br>W9 W10 W11<br>W12 W13 W14<br>W15 C1 C2 C3<br>C4 C5                         | N1 N2                 | P1 P2 P3      |
| EK2               | K_W02 K_W05<br>K_U01 K_U07                                                     | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8<br>W9 W10 W11<br>W12 W13 W14<br>W15 C6 C7 C8<br>C9 C10 C11 C12<br>C13 C14 C15 | N2 N3 N4              | F1 F2 P3      |
| EK3               | K_W02 K_W05<br>K_U05                                                           | Cel 2           | W16 W17 W18<br>W19 W20 W21<br>W22 W23 W24<br>C16 C17 C18<br>C19                                          | N1 N3                 | P1 P2 P3      |
| EK4               | K_W05 K_U05                                                                    | Cel 2           | W16 W17 W18<br>W19 W20 W21<br>W22 W23 W24<br>C20 C21 C22<br>C23 C24                                      | N2 N3                 | F1 F2 P3      |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1 ] **W. Kołodziej** — *Analiza Matematyczna*, Warszawa, 1983, PWN
- [2 ] **H. Cartan** — *Calcul Differentiel, Formes Differentiel*, Paris, 1967, Hermann
- [3 ] **L. M. Drużkowski** — *Analiza Matematyczna dla Fizyków*, Kraków, 1997, Wyd. UJ
- [4 ] **W. Stankiewicz** — *Zadania z Matematyki dla Wyższych Uczelni*, Warszawa, 1983, PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1 ] **M. Spivak** — *Analiza Matematyczna na Rozmaitościach*, Warszawa, 1977, PWN

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr hab. Ihor MYKYTYUK (kontakt: [imykytyuk@pk.edu.pl](mailto:imykytyuk@pk.edu.pl))

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: [imykytyuk@pk.edu.pl](mailto:imykytyuk@pk.edu.pl))

2 dr Mariusz Jużyniec (kontakt: [juzyniec@pk.edu.pl](mailto:juzyniec@pk.edu.pl))

3 dr Magdalena Grzech (kontakt: [mgrzech@pk.edu.pl](mailto:mgrzech@pk.edu.pl))

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
.....  
.....