

POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2017/2018

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Teoria miary
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Measure Theory
KOD PRZEDMIOTU	WFMiI M oIS C1 17/18
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty kierunkowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	4.00
SEMESTRY	6

2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
6	30	30	0	0	0	0

3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Zapoznanie z podstawowymi pojęciami teorii miary ze szczególnym naciskiem na teorię miary Lebesguea

4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Znajomość materiału na poziomie koniecznym do zaliczenia przedmiotów: Wstęp do logiki i teorii mnogości, Wstęp do topologii, Analiza matematyczna I.

5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

EK1 Wiedza Student zna podstawowych pojęcia teorii miary i ich własności.

EK2 Umiejętności Student umie zbadać mierzalność zbiorów i funkcji (rzeczywistych); rozróżnia różne typy zbieżności ciągów funkcji (rzeczywistych) określonych na przestrzeni z miarą i umie je przeanalizować.

EK3 Umiejętności Student umie rozpoznać i wykazać najważniejsze własności topologiczne podzbiorów przestrzeni euklidesowej związane z miarą.

EK4 Kompetencje społeczne Student wykazuje się umiejętnością precyzyjnego formułowania pytań służących pogłębieniu rozumienia danego problemu oraz odnajdywania brakujących elementów rozumowania.

6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	6
W2	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni R_n) i jej własności definicja zbioru mierzalnego, sigma-ciało zbiorów mierzalnych miara Lebesgue'a	8
W3	miara zewnętrzna (na dowolnym zbiorze potęgowym) warunek Caratheodory'ego własności rodziny zbiorów spełniających warunek Caratheodory'ego związek ze zbiorami mierzalnymi przestrzeni R_n	8
W4	Aksjomat wyboru i niemierzalne podzbiory prostej rzeczywistej	2
W5	funkcje mierzalne zbieżność według miary	6

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Pierścień zbiorów, sigma-pierścień zbiorów, ciało zbiorów, sigma-ciało zbiorów, rodziny monotoniczne, zbiory borelowskie	6
C2	zawartość przedziału, miara zewnętrzna (w przestrzeni R_n) i jej własności sigma-ciało zbiorów mierzalnych	6
C3	własności topologiczne i mierzalność podzbiorów prostej i przestrzeni R_n	10

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C4	funkcje mierzalne zbieżność według miary	8

7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady

N2 Ćwiczenia audytoryjne

N3 e-learning (platforma Moodle)

8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	60
Konsultacje przedmiotowe	10
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	25
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
przygotowania odpowiedzi zadań zamieszczonych na platformie e-learningowej	25
SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA	120
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	4.00

9 SPOSOBY OCENY

OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

F3 Test

OCENA PODSUMOWUJĄCA**P1** Zaliczenie ustne**P2** Średnia ważona ocen formujących**WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU****W1** Warunkiem zaliczenia kursu jest uzyskanie co najmniej połowy punktów z każdego z dwóch kolokwium oraz oceny pozytywnej podczas rozmowy zaliczeniowej; ponadto wymagana jest obecność na zajęciach.**OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA****B1** Inne**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, przestrzeń z miarą, zawartość n -wymiarowego przedziału); zna konstrukcję miary Lebesgue'a; zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 3.5	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n -wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a); zna definicję funkcji mierzalnej.
NA OCENĘ 4.0	Student zna podstawowe pojęcia teorii miary (sigma-ciało, miara, miara zewnętrzna, zawartość n -wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); zna definicję i podstawowe własności funkcji mierzalnych.
NA OCENĘ 4.5	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna); student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n -wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną.

NA OCENĘ 5.0	Student zna podstawowe struktury algebraiczne związane z podstawami teorii miary (sigma-pierścień, sigma-ciało, klasa mnotoniczna) i zależności pomiędzy nimi; student zna podstawowe pojęcia teorii miary (miara, miara zewnętrzna, zawartość n-wymiarowego przedziału, przestrzeń z miarą); zna konstrukcję miary przy użyciu miary zewnętrznej (w szczególności konstrukcję miary Lebesgue'a) i potrafi ją zaprezentować; student potrafi przedstawić konstrukcję zbioru niemierzalnego na prostej (przy założeniu aksjomatu wyboru); student zna definicję funkcji mierzalnej i podstawowe własności klasy funkcji mierzalnych; student zna zależności pomiędzy funkcją ciągłą i mierzalną; student potrafi przedstawić przykłady funkcji niemierzalnych.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n-wymiarowych (w n-wymiarowym produkcie prostej) ich przeliczalnych sum i przecięć; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wynika wprost z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami a zbieżnością według miary.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n-wymiarowych (w n-wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność łatwo można wydedukować z odpowiednich twierdzeń); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n-wymiarowych (w n-wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n-wymiarowego produktu prostej rzeczywistej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności funkcji w nieskomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary (w prostych rachunkowo przypadkach); zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami.

NA OCENĘ 4.5	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w bardziej skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność nie wymaga szczególnie skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać .
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi policzyć miarę skończonych zbiorów punktów, przedziałów n -wymiarowych (w n -wymiarowym produkcie prostej) ich sum i przecięć. Student potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w oparciu o poznane twierdzenia mierzalność podzbiorów n -wymiarowej przestrzeni euklidesowej; Student potrafi twórczo wykorzystać zbiór niemierzalny do badania mierzalności innych zbiorów lub mierzalności funkcji; Student umie wykorzystać twierdzenia dotyczące funkcji mierzalnych do zbadania mierzalności (lub niemierzalności) funkcji w skomplikowanych przypadkach (funkcje ciągłe, funkcje będące wynikiem działań algebraicznych na funkcjach mierzalnych, granice ciągów funkcji mierzalnych, złożenia funkcji ciągłych i mierzalnych, funkcje charakterystyczne zbiorów, których mierzalność wymaga dość skomplikowanych uzasadnień); student umie zbadać zbieżność punktową i jednostajną ciągu funkcji rzeczywistych oraz zbieżność według miary; zna zależności pomiędzy tymi zbieżnościami i potrafi je wykorzystać .
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć w prostych przypadkach, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej jest typu F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 3.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić w prostych przypadkach, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej jest F-sigma lub G-delta.
NA OCENĘ 4.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 4.5	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.
NA OCENĘ 5.0	Student zna definicję zbioru borelowskiego; potrafi rozstrzygnąć i uzasadnić, czy dany podzbiór n -wymiarowego produktu prostej lub wybranych podprzestrzeni funkcji (ciągłych) rzeczywistych zmiennej rzeczywistej jest borelowski i wskazać jego miejsce w hierarchii zbiorów borelowskich. Student potrafi wykorzystać tę wiedzę przy badaniu mierzalności zbiorów i funkcji.

EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie ma wiedzy ani umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu).
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi poprawnie formułować definicje i twierdzenia tzn. wskazać, obiekt definiowany i pojęcia definiujące (w definicji) a także założenia i tezę (w twierdzeniu). Student potrafi prześledzić ciąg lematów i wskazać, w którym miejscu dowodu twierdzenia są wykorzystywane. Student potrafi przeanalizować definicję nowego pojęcia i skonstruować przykład definiowanego pojęcia. Student potrafi analizować w oparciu o definicje i poznane twierdzenia zależności pomiędzy pojęciami i wskazywać nierozstrzygnięte (na anym etapie poznawania teorii) pytania. Student potrafi wydobyć z treści zadania, co powinien udowodnić a następnie skazać poznane twierdzenia, które będą przydatne w dowodzie i sformułować dowód.

10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_W04 K_U09	Cel 1	W1 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK2	K_U09 K_U13	Cel 1	W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK3	K_U23	Cel 1	W1 W2 C1 C2 C3	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2
EK4	K_K02 K_K03 K_K04 K_K05 K_K06 K_K07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3	F1 F2 F3 P1 P2

11 WYKAZ LITERATURY

LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | W. Kołodziej — *Analiza matematyczna*, Warszawa, 2008, PWN
[2] | S. Łojasiewicz — *Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych*, Warszawa, 1973, PWN

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | F. M. Filipczak — *Teoria miary i całki*, Łódź, 1997, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego
[2] | P. R. Halmos — *Measure theory*, New York-Heidelberg-Berlin, 1973, Springer-Verlag
[3] | J.C. Oxtoby — *Measure and Category*, New York-Heidelberg-Berlin, 1980, Springer-Verlag
[4] | D.H. Fremlin — *Measure Theory (tom 1 Irreducible Minimum)*, England, 2000, Torres Fremlin

12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Magdalena Grzech (kontakt: magdag@pk.edu.pl)

OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Magdalena Grzech (kontakt: magdag@pk.edu.pl)

13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)



PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....