Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

Karta przedmiotu

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2021/2022

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma sudiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Modelowanie matematyczne

1 Informacje o przedmiocie

Nazwa przedmiotu	Algebra liniowa z geometrią analityczną II
Nazwa przedmiotu w języku angielskim	Linear algebra with the analitic geometry II
Kod przedmiotu	WIiT M oIS C4 21/22
Kategoria przedmiotu	Przedmioty kierunkowe
Liczba punktów ECTS	8.00
Semestry	2

2 Rodzaj zajęć, liczba godzin w planie studiów

Semestr	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Laboratorium komputerowe	Seminarium	Projekt
2	45	45	0	0	0	0

3 Cele przedmiotu

Cel 1 Nauczyć studentów podstawowych metod algebraicznych i geometrycznych niezbędnych w analizie, równaniach różniczkowych, teorii prawdopodobieństwa itd., aktywnie stosowanych we współczesnej ekonomii, finansach, kryptografii, kodowaniu itd.

4 Wymagania wstępne w zakresie wiedzy, umiejętności i innych kompetencji

1 Matematyka na poziomie szkolnym zaawansowanym oraz zaliczenie pierwszego semestru

5 Efekty kształcenia

EK1 Wiedza Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się struktury przekształceń liniowych, przestrzeni afinicznych, operatorów liniowych i ich macierzy, przestrzeni z iloczynem skalarnym i przestrzeni afinicznych

EK2 Umiejętności Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia stosujące się form dwuliniowych i kwadratowych oraz algebry wieloliniowej, struktury przekształceń liniowych, przestrzeni afinicznych, operatorów liniowych i ich macierzy, przestrzeni z iloczynem skalarnym i przestrzeni afinicznych, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać zadania z tej dziedziny

EK3 Wiedza Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia stosujące się form dwuliniowych i kwadratowych oraz algebry wieloliniowej

EK4 Kompetencje społeczne Student potrafi potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi sformułować opinie na temat podstawowych zagadnień

6 Treści programowe

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W1	Struktury przekształceń liniowych: wartości i wektory własne endomorfizmu (macierzy), podprzestrzenie własne, wielomian charakterystyczny. Diagonalizacja macierzy. Podprzestrzenie niezmiennicze. Twierdzenie Hamiltona-Cayleya. Klatka Jordana, postać Jordana macierzy	10
W2	Przestrzenie afiniczne: wektory swobodne i zaczepione. Podprzestrzenie afiniczne. Współrzędne punktów i płaszczyzn. Równania prostej i płaszczyzny, wzajemne położenia prostych i płaszczyzn	5
W3	Przestrzenie z iloczynem skalarnym: iloczyn skalarny, definicje przestrzeni euklidesowej i przestrzeni unitarnej. Długość wektora, kąt między wektorami, odległość punktu od prostej i płaszczyzny.Iloczyn wektorowy i jego zastosowanie. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne. Izomorfizm przestrzeni euklidesowej i przestrzeni dualnej.	10
W4	Operatory liniowe i ich macierze: Operator sprzężony. Operator normalny. Operator samosprzężony. Operatory i macierze ortogonalne. Grupy liniowe, grupy izometrii, grupy podobieństw	8
W5	Formy dwuliniowe i kwadratowe: formy dwuliniowe, ich macierze, transformacja macierzy przy zmianie bazy. Formy kwadratowe, formy biegunowe. Przekształcenie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metodą Lagrangea i za pomocą przekształceń ortogonalnych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia. Formy nieujemne (dodatnie) określone. Twierdzenie Sylwestera.	8

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W6	Algebra wieloliniowa: odwzorowania i formy wieloliniowe. Określenie iloczynów tensorowych przestrzeni liniowej, istnienie, wymiar, iloczyn tensorowy, przemienność, łączność, uniwersalność. Tensory, symetryczność, antysymetria. Współrzedne tensora w bazie. Algebra zewnętrzna, bazy potęg zewnętrznych	4

Ćwiczenia		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
C1	Stryktura przekształceń liniowych: obliczanie wartości własnych, wektorów własnych i podprzestrzeni własnych, sprowadzenie macierzy do postaci schodkowej, sprowadzenie macierzy do postaci Jordana	10
C2	Przestrzenie afiniczne: obliczanie współrzednych afinicznych punktów w róznych układach współrzędnych, wyznaczenie równań prostych i płaszczyzn, badanie wzajemnego położenia prostych i płaszczyzn	5
C3	Przestrzenie z iloczynem skalarnym: zastosowanie iloczynu skalarnego i iloczynu wektorowego. Obliczanie odległości punktu od prostej i płaszczyzny, kątów między prostymi i płaszczyznami. Ortogonolizacja bazy przestrzeni liniowej metodą Grama-Schmidta. Relacja między algebraicznym i geometrycznym opisem przekształceń i zbiorów algebraicznych pierwszego stopnia.	10
C4	Operatory liniowe i ich macierze: Obliczanie macierzy operatorów liniowych i ich diagonalizacja. Zastosowanie grup izometrii, grup podobieństw	8
C5	Formy dwuliniowe i kwadratowe: wyznaczenie macierzy formy dwuliniowej i formy kwadratowej. Sprowadzanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metodą Lagrangea i za pomocą przekształceń ortogonalnych), sprowadzanie krzywych i powierzchni stopnia 2 do postaci kanonicznej (za pomoca przekształceń ortogonalnych)	8
C6	Algebra wieloliniowa: badanie własności odwzorowań wieloliniowych, badanie własności iloczynu tensorowego, zastosowanie tensorów. Wyznaczenie współrzędnych tensora w bazie, wyznaczenie iloczynu tensorowego macierzy. Własności iloczynu zewnętrznego, obliczanie potęgi zawnętrznej macierzy	4

7 Narzędzia dydaktyczne

N1 Wykłady. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo. e-Kurs na platformie Delta PK.

N2 Konsultacje

N3 Dyskusja

N4 Praca w grupach. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

8 Obciążenie pracą studenta

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	90
Konsultacje przedmiotowe	30
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	110
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
Sumaryczna liczba godzin dla przedmiotu wynikająca z całego nakładu pracy studenta	**240**
Sumaryczna liczba punktów ECTS dla przedmiotu	8.00

9 Sposoby oceny

Aktywność w e-kursie umieszczonym na platformie delta PK. W sytuacji zdalnego nauczania wszystkie sprawdziany prowadzone są za posrednictwem platformy Delta PK i MS Teams.

Ocena formująca

F1 Kolokwium

Ocena podsumowująca

P1 Zaliczenie pisemne

P2 Egzamin pisemny

P3 Egzamin ustny

Warunki zaliczenia przedmiotu

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy zaliczyli ćwiczenia

W2 Egzamin pisemny składa się z części zadaniowej i teoretycznej

W3 Ocena końcowa jest sumą ocen P1, P2 i P3

Kryteria oceny

Efekt kształcenia 1

Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym
Na ocenę 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym
Na ocenę 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, lecz również zilustrować ich przykładami
Na ocenę 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, może ich udowodnić i zilustrować przykładami, rozwiązuje podstawowe zadania
Na ocenę 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym i ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
Na ocenę 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym i ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
Efekt kształcenia 2	
Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje
Na ocenę 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje
Na ocenę 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania

Na ocenę 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadania teoretycznego i praktycznego charakteru
Na ocenę 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań
Na ocenę 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o strukturze przekształcenia liniowego, operatorach liniowych i ich macierzach, przestrzeniach afinicznych i przestrzeniach z iloczynem skalarnym, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formułować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru
Efekt kształcenia 3	
Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej
Na ocenę 3.0	Student zna podstawowe pojęcia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej i ilustruje ich przykładami
Na ocenę 3.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, lecz również zilustrować ich przykładami
Na ocenę 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, może ich udowodnić i zilustrować przykładami oraz rozwiązać zadanie teoretycznego i praktycznego charakteru
Na ocenę 4.5	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań
Na ocenę 5.0	Student potrafi nie tylko sformułować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań praktycznego i teoretycznego charakteru
Efekt kształcenia 4	

Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, nie potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, nie potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, nie potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień
Na ocenę 3.0	Student zna o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień
Na ocenę 3.5	Student potrafi nie tylko sformulować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, lecz również zilustrować ich przykładami i rozwiązać elementarne zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień
Na ocenę 4.0	Student formuluje podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, może ich udowodnić, zilustrować przykładami oraz rozwiązać standardowe zadania, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień
Na ocenę 4.5	Student potrafi nie tylko sformulować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień
Na ocenę 5.0	Student potrafi nie tylko sformulować podstawowe pojęcia i zagadnienia o formach dwuliniowych i kwadratowych oraz z algebry wieloliniowej, potrafi w sposób zrozumiały, w mowie i na piśmie, przedstawiać poprawne rozumowania matematyczne, formulować twierdzenia i definicje, ich udowodnić oraz zilustrować przykładami, lecz również stosować do rozwiązywania standardowych i niestandardowych zadań teoretycznego i praktycznego charakteru, potrafi samodzielnie wyszukiwać informacje w literaturze, w językach obcych, potrafi formawać opinie na temat podstawowych zagadnień

10 Macierz realizacji przedmiotu

Efekt kształcenia	Odniesienie danego efektu do szczegółowych efektów zdefiniowanych dla programu	Cele przedmiotu	Treści programowe	Narzędzia dydaktyczne	Sposoby oceny
EK1	K_W01 K_W02	Cel 1	W1 W2 W3 C1 C2 C3	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK2	K_U01 K_U02	Cel 1	W4 C4	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK3	K_W01 K_W02 K_W03	Cel 1	W3 W5 C5	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3
EK4	K_K01 K_K02	Cel 1	W6 C6	N1 N2 N3 N4	F1 P1 P2 P3

11 Wykaz literatury

Literatura podstawowa

[1] A. Piękosz — *Algebra liniowa*, Kraków, 2009, PK

[2] A.I. Kostrikin — *Wstęp do algebry (cz 1,2)*, Warszawa, 2004, PWN

[3] J. Rutkowski — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2010, PWN

[4] J. Gancarzewicz — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, UJ

[5] G. Banaszak, W. Gajda — *Elementy algebry liniowej (cz 1,2)*, Warszawa, 2002, WNT

Literatura uzupełniająca

[1] A. Białynicki-Birula — *Algebra liniowa z geometrią*, Warszawa, 1976, PWN

[2] F. Leja — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1972, PWN

[3] J. Gancarzewicz — *Arytmetyka*, Kraków, 2002, UJ

[4] P. Kajetanowicz, J. Wierzejewski — *Algebra z geometrią analityczna*, Warszawa, 2008, PWN

[5] J. Klukowska, I. Nabiałek — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 1999, WNT

12 Informacje o nauczycielach akademickich

Osoba odpowiedzialna za kartę

prof. dr hab. Orest Artemovych (kontakt: artemo@pk.edu.pl)

Osoby prowadzące przedmiot

1 Prof. dr hab. Orest Artemovych (kontakt: artemo@usk.pk.edu.pl)

2 Dr Marcin Skrzyński (kontakt: pfskrzyn@cyfronet.pl)

3 Dr Kamil Kular (kontakt: kamil_kular@wp.pl)

13 Zatwierdzenie karty przedmiotu do realizacji

(miejscowość, data) (odpowiedzialny za przedmiot) (dziekan)

Przyjmuję do realizacji (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....

.....

.....