Politechnika Krakowska im. Tadeusza Kościuszki

Karta przedmiotu

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2021/2022

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana — Profil: Praktyczny

Forma sudiów: stacjonarne — Kod kierunku: MS

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka z Informatyką

1 Informacje o przedmiocie

Nazwa przedmiotu	Algebra liniowa z geometrią analityczną
Nazwa przedmiotu w języku angielskim	Linear algebra with analytic geometry
Kod przedmiotu	WIiT MS pIS C5 21/22
Kategoria przedmiotu	Przedmioty kierunkowe
Liczba punktów ECTS	8.00
Semestry	1

2 Rodzaj zajęć, liczba godzin w planie studiów

Semestr	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Laboratorium komputerowe	Seminarium	Projekt
1	45	45	0	0	0	0

3 Cele przedmiotu

Cel 1 Nauczenie studentów podstawowych metod algebraicznych i geometrycznych niezbędnych w innych dziedzinach matematyki i aktywnie stosowanych we współczesnej inżynierii, ekonomii, finansach, kryptografii, teorii informacji itp.

4 Wymagania wstępne w zakresie wiedzy, umiejętności i innych kompetencji

1 Matematyka na poziomie szkolnym.

5 Efekty kształcenia

EK1 Wiedza Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni i odwzorowań liniowych oraz geometrii przestrzeni euklidesowych (K_W01, K_W11).

EK2 Wiedza Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin (K_W05, K_U08).

EK3 Kompetencje społeczne Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana) (K_W01, K_W04).

EK4 Umiejętności Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje z tej tematyki (K_U08, K_U35).

6 Treści programowe

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W1	Grupy podstawowe własności. Grupy przekształceń, grupy permutacji (cykle, transpozycje, transpozycje liczb sąsiednich, inwersje, parzystość). Pierścienie i ciała podstawowe własności. Pierścień klas reszt modulo n.	3
W2	Ciało liczb zespolonych (postaci algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej). Wzór de Moivrea, pierwiastkowanie, potęgowanie, interpretacja geometryczna.	3
W3	Pierścień wielomianów. Dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWW i NWD w pierścieniu wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki nieprzywiedlne, postać kanoniczna wielomianu. Pierwiastki wielomianu (twierdzenie Bzouta, pierwiastki wielokrotne). Schemat Hornera. Zasadnicze twierdzenie algebry. Wielomiany rzeczywiste i zespolone.	4
W4	Przestrzenie liniowe podstawowe własności. Kombinacja liniowa, liniowa niezależność, liniowa zależność, baza i wymiar przestrzeni liniowej. Podprzestrzenie liniowe. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przecięcie, suma prosta). Przestrzeń ilorazowa. Wymiar sumy podprzestrzeni i wymiar przestrzeni ilorazowej. Izomorfizm przestrzeni liniowych.	5
W5	Macierze, przekształcenia liniowe (jądro, obraz), ich wektory własne i wartości własne. Rząd macierzy. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Podobieństwo macierzy.	6

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W6	Wyznaczniki i układy równań liniowych podstawowe wiadomości. Metoda eliminacji Gaussa. Wyznacznik iloczynu macierzy. Rozwinięcie Laplacea (minory, dopełnienia algebraiczne). Macierz odwrotna. Jednorodne i niejednorodne układy równań liniowych. Uklady Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Capellego.	5
W7	Twierdzenie Hamiltona-Cayleya. Klatki jordanowskie, postać kanoniczna Jordana macierzy.	4
W8	Przestrzenie z iloczynem skalarnym (pojęcie i podstawowe własności iloczynu skalarnego, przestrzeń euklidesowa, przestrzeń unitarna). Długość wektora, kąt miedzy wektorami, iloczyn wektorowy i jego zastosowanie. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne.	4
W9	Elementy geometrii analitycznej: iloczyn skalarny, iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany i ich zastosowania, równania płaszczyzny (ogólne, parametryczne, płaszczyzna przechodząca przez trzy punkty), równania prostej (kierunkowe, parametryczne, prosta przechodząca przez dwa punkty), odległość punktu od prostej i płaszczyzny.	3
W10	Macierze ortogonalne, macierze unitarne. Izometrie. Macierze hermitowskie i symetryczne, ich diagonalizacja.	4
W11	Formy dwuliniowe i kwadratowe podstawowe własności. Przekształcanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metoda Lagrangea i metoda sprowadzania do osi głównych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia.	4

Ćwiczenia		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
C1	Grupy podstawowe własności. Grupy przekształceń, grupy permutacji (cykle, transpozycje, transpozycje liczb sąsiednich, inwersje, parzystość). Pierścienie i ciała podstawowe własności. Pierścień klas reszt modulo n.	3
C2	Ciało liczb zespolonych (postaci algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej). Wzór de Moivrea, pierwiastkowanie, potęgowanie, interpretacja geometryczna.	3
C3	Pierścień wielomianów. Dzielenie z resztą, algorytm Euklidesa, NWW i NWD w pierścieniu wielomianów. Rozkład wielomianu na czynniki nieprzywiedlne, postać kanoniczna wielomianu. Pierwiastki wielomianu (twierdzenie Bzouta, pierwiastki wielokrotne). Schemat Hornera. Zasadnicze twierdzenie algebry. Wielomiany rzeczywiste i zespolone.	4
C4	Przestrzenie liniowe podstawowe własności. Kombinacja liniowa, liniowa niezależność, liniowa zależność, baza i wymiar przestrzeni liniowej. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przecięcie, suma prosta). Przestrzeń ilorazowa. Wymiar sumy i wymiar przestrzeni ilorazowej. Izomorfizmy przestrzeni liniowych..	6

Ćwiczenia		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
C5	Macierze, przekształcenia liniowe (jądro, obraz), ich wektory własne i wartości własne. Rząd macierzy. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Podobieństwo macierzy.	6
C6	Obliczanie wyznaczników, wyznaczanie macierzy odwrotnych, rozwiązywanie układów równań liniowych.	5
C7	Sprowadzanie macierzy do postaci kanonicznej Jordana.	4
C8	Przestrzenie z iloczynem skalarnym. Długość wektora, kąt miedzy wektorami. Baza ortogonalna, proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Dopełnienie ortogonalne.	3
C9	Elementy geometrii analitycznej: iloczyn wektorowy, iloczyn mieszany i ich zastosowania, równania płaszczyzny, równania prostej, odległość punktu od prostej i płaszczyzny.	3
C10	Diagonalizacja macierzy ortogonalnych, unitarnych, hermitowskich i symetrycznych.	4
C11	Przekształcanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metoda Lagrangea i metoda sprowadzania do osi głównych). Krzywe algebraiczne i powierzchnie drugiego stopnia.	4

7 Narzędzia dydaktyczne

N1 Wykłady

N2 Zadania tablicowe

N3 Dyskusja

N4 Konsultacje

N5 W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

8 Obciążenie pracą studenta

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	90
Konsultacje przedmiotowe	30
Egzaminy i zaliczenia w sesji	15
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	105
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
Sumaryczna liczba godzin dla przedmiotu wynikająca z całego nakładu pracy studenta	**240**
Sumaryczna liczba punktów ECTS dla przedmiotu	8.00

9 Sposoby oceny

Ocena formująca

F1 sprawdziany z bieżącego materiału (na ćwiczeniach)

F3 aktywniść na zajęciach

Ocena podsumowująca

P1 kolokwium (podsumowujące przedmiot) pisemne i ustne

P2 Egzamin ustny

P3 Egzamin pisemny

Warunki zaliczenia przedmiotu

W1 Warunkiem koniecznym i wystarczającym zaliczenia ćwiczeń jest uzyskanie więcej niż połowy maksymalnej sumarycznej liczby punktów ze wszystkich sprawdzianów. Warunkiem koniecznym i wystarczającym zdania egzaminu pisemnego jest zdobycie więcej niż połowy maksymalnej sumarycznej liczby punktów ze wszystkich zadań. Ocena końcowa z przedmiotu jest średnią arytmetyczną trzech ocen cząstkowych: z ćwiczeń (zaliczenie), egzaminu pisemnego i egzaminu ustnego. Wszystkie oceny cząstkowe muszą być pozytywne.

Ocena aktywności bez udziału nauczyciela

B1 Test

Kryteria oceny

Efekt kształcenia 1	
Na ocenę 2.0	Student nie zna, nie rozumie i nie objaśnia podstawowe pojęcia dotyczące przestrzeni i odwzorowań liniowych oraz geometrii przestrzeni euklidesowych
Na ocenę 3.0	Student rozwiązuję standardowe zadania, formułuję definicje podstawowych pojęć, ilustruję ich przykładami
Na ocenę 3.5	Student rozwiązuję standardowe zadania, formułuję definicje podstawowych pojęć, ilustruję ich przykładami, formułuję podstawowe zagadnienia
Na ocenę 4.0	Student rozwiązuję standardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuję definicje podstawowych pojęć, ilustruję ich przykładami, formułuję podstawowe zagadnienia i buduje ich dowody
Na ocenę 4.5	Student rozwiązuję standardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuję definicje podstawowych pojęć, ilustruję ich przykładami, formułuję zagadnienia i buduje ich dowody
Na ocenę 5.0	Student rozwiązuję standardowe i niestandardowe zadania praktyczne i teoretyczne, formułuję definicje podstawowych pojęć, ilustruję ich przykładami, formułuję zagadnienia i buduje ich dowody
Efekt kształcenia 2	
Na ocenę 2.0	Student nie potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również nie potrafi rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin
Na ocenę 3.0	Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin
Na ocenę 3.5	Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin, formułuję podstawowe zagadnienia
Na ocenę 4.0	Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin, formułuję podstawowe zagadnienia, i może ich udowodnić
Na ocenę 4.5	Student potrafi ilustrować przykładami pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać zadania (teoretyczne i praktyczne) z obu tych dziedzin, formułuję zagadnienia i może ich udowodnić
Na ocenę 5.0	Student potrafi ilustrować przykładami pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać zadania (teoretyczne i praktyczne, standardowe i niestandardowe) z obu tych dziedzin, formułuję zagadnienia i może ich udowodnić
Efekt kształcenia 3	
Na ocenę 2.0	Student nie zna, nie rozumie i nie objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)

Na ocenę 3.0	Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia (i ilustruję ich przykładami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)
Na ocenę 3.5	Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia (i ilustruję ich przykładami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)
Na ocenę 4.0	Student zna, rozumie i objaśnia podstawowe pojęcia i twierdzenia (i ilustruję ich przykładami, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)
Na ocenę 4.5	Student zna, rozumie i objaśnia pojęcia i twierdzenia (i ilustruję ich przykładami teoretycznymi i praktycznymi, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)
Na ocenę 5.0	Student zna, rozumie i objaśnia pojęcia i twierdzenia (i ilustruję ich przykładami teoretycznymi i praktycznymi, standardowymi i niestandardowymi, z dowodami) dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy (w szczególności dotyczące diagonalizacji i postaci kanonicznej Jordana)
Efekt kształcenia 4	
Na ocenę 2.0	Student nie potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje z tej tematyki
Na ocenę 3.0	Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze praktyczne informacje z tej tematyki
Na ocenę 3.5	Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować podstawowe zagadnienia, jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki
Na ocenę 4.0	Student potrafi rozwiązywać zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować podstawowe zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki
Na ocenę 4.5	Student potrafi rozwiązywać (standardowe) zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki

Na ocenę 5.0	Student potrafi rozwiązywać (standardowe i niestandardowe) zadania dotyczące wielomianów, układów równań liniowych, wyznaczników, liczb zespolonych i macierzy, formułować zagadnienia (z dowodami), jak również samodzielnie wyszukiwać w literaturze informacje (teoretyczne i praktyczne) z tej tematyki

10 Macierz realizacji przedmiotu

Efekt kształcenia	Odniesienie danego efektu do szczegółowych efektów zdefiniowanych dla programu	Cele przedmiotu	Treści programowe	Narzędzia dydaktyczne	Sposoby oceny
EK1	K_W01 K_W11	Cel 1	W1 W2 W3 W4 C1 C2 C3 C4	N1 N2 N3 N4	F1 F3 P1
EK2	K_W05 K_U08	Cel 1	W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11	N1 N2 N3 N4	F1 F3 P1
EK3	K_W01 K_W04	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11	N1 N2 N3 N4	F1 F3 P1
EK4	K_U08 K_U35	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11	N1 N2 N3 N4	F1 F3 P1

11 Wykaz literatury

Literatura podstawowa

[1] A. Piękosz — *Algebra liniowa*, Kraków, 2009, PK

[2] J. Gancarzewicz — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2004, Wydawnictwo UJ

[3] J. Rutkowski — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2010, PWN

[4] J. Rutkowski — *Algebra abstrakcyjna w zdaniach*, Warszawa, 2001, PWN

[5] J. Klukowska, I. Nabiałek — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 1999, PWN

[6] S. Przybyło, A Szlachtowski — *Algebra i wieloliniowa geometria analityczna w zadaniach*, Warszawa, 1988, PWN

[7] F. Leja — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1972, PWN

Literatura uzupełniająca

[1] P. Kajetanowicz, J. Wierzejewska — *Algebra z geometrią analityczną*, Warszawa, 2008, PWN

12 Informacje o nauczycielach akademickich

Osoba odpowiedzialna za kartę

prof. dr hab. Orest Artemovych (kontakt: artemo@pk.edu.pl)

Osoby prowadzące przedmiot

1 Dr Marcin Skrzyński (kontakt: marcin.skrzynski@pk.edu.pl)

2 Dr Kamil Kular (kontakt: kkular@pk.edu.pl)

3 Dr Monika Herzog (kontakt: mherzog@pk.edu.pl)

13 Zatwierdzenie karty przedmiotu do realizacji

(miejscowość, data) (odpowiedzialny za przedmiot) (dziekan)

Przyjmuję do realizacji (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .