

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2022/2023

Wydział Inżynierii Środowiska i Energetyki

Kierunek studiów: Geoinformatyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: 12

Stopień studiów: I

Specjalności: bez specjalności

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                              |
|-----------------------------------------|------------------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Matematyka - Algebra liniowa |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Mathematics- Algebra         |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WIŚIE GI oIS C12 22/23       |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty kierunkowe        |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 5.00                         |
| SEMESTRY                                | 2                            |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | CWICZENIA | LABORATORIA | LABORATORIA<br>KOMPUTERO-<br>WE | PROJEKT | SEMINARIUM |
|---------|--------|-----------|-------------|---------------------------------|---------|------------|
| 2       | 30     | 30        | 0           | 0                               | 0       | 0          |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Celem przedmiotu jest zapoznanie studentów z wybranymi działami algebry liniowej, niezbędnymi do prowadzenia obliczeń z zakresu geoinżynierii, hydroinżynierii, informatyki

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Opanowanie materiału z zakresu matematyki na poziomie egzaminu maturalnego.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Opanowanie podstawowych wiadomości z zakresu algebry liniowej z geometrią: rachunek macierzowy, liczby zespolone i układy równań liniowych.

**EK2 Umiejętności** Wykonywanie podstawowych operacji macierzowych, obliczanie wyznaczników, rozwiązywanie układów równań liniowych, wykonywanie działań na liczbach zespolonych.

**EK3 Kompetencje społeczne** Umiejętność precyzyjnego redagowania rozumowania matematycznego oraz formułowania problemów matematycznych, umiejętność weryfikowania poprawności rozumowania matematycznego.

**EK4 Umiejętności** Wykonywanie podstawowych operacji macierzowych z zastosowaniem do rozwiązywania układów równań liniowych, wykorzystanie metod algebry liniowej do rozwiązywania problemów z zakresu geometrii.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD     |                                                                                                                                                   |                  |
|------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                            | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b>  | Funkcje: zbiór, iloczyn kartezjański, relacja, relacja równoważnościowa, funkcja, działania na funkcjach, własności funkcji.                      | 2                |
| <b>W2</b>  | Liczby zespolone: definicja, interpretacja geometryczna, postać algebraiczna, postać trygonometryczna, postać wykładnicza.                        | 2                |
| <b>W3</b>  | Wzór de Moivre'a, pierwiastkowanie, równania kwadratowe, podstawowe twierdzenie algebry.                                                          | 2                |
| <b>W4</b>  | Podstawowe struktury algebraiczne: działanie wewnętrzne i zewnętrzne, własności działania, grupa, ciało, przykłady.                               | 4                |
| <b>W5</b>  | Przestrzeń wektorowa na ciele, definicja i własności odwzorowania liniowego, podprzestrzeń, jądro i obraz odwzorowania, podprzestrzeń generowana. | 4                |
| <b>W6</b>  | Liniowa zależność i niezależność wektorów, baza przestrzeni wektorowej, wymiar, przestrzeń dualna.                                                | 2                |
| <b>W7</b>  | Elementy teorii macierzy: działania na macierzach, macierz transponowana, symetryczna i antysymetryczna.                                          | 2                |
| <b>W8</b>  | Wyznaczniki: definicja, własności.                                                                                                                | 2                |
| <b>W9</b>  | Wyznaczniki: rozwinięcie Laplace'a, twierdzenie Cauchyego, macierz odwrotna, pojęcie rzędu macierzy.                                              | 2                |
| <b>W10</b> | Układy $n$ równań liniowych o $n$ niewiadomych: twierdzenie Cramera i Kroneckera-Capellego, wektory i wartości własne macierzy.                   | 2                |

| WYKŁAD     |                                                                                                                                    |                  |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                             | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W11</b> | Podstawy geometrii analitycznej: iloczyn skalarny, wektorowy i mieszany, równoległość i prostokątowość wektorów, forma kwadratowa. | 4                |
| <b>W12</b> | Wstęp do iloczynu tensorowego.                                                                                                     | 2                |

| CWICZENIA  |                                                                                                                                                                                          |                  |
|------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP         | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                   | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b>  | Badanie własności przykładowych funkcji i operacji na nich.                                                                                                                              | 2                |
| <b>C2</b>  | Przykłady działań na liczbach zespolonych.                                                                                                                                               | 4                |
| <b>C3</b>  | Przykłady struktur algebraicznych, ciało liczb zespolonych.                                                                                                                              | 4                |
| <b>C4</b>  | Przestrzenie wektorowe i odwzorowania liniowe, wyznaczanie jądra i obrazu odwzorowania liniowego,                                                                                        | 4                |
| <b>C5</b>  | Sprawdzanie liniowej niezależności i zależności wektorów, wyznaczanie bazy i wymiaru przestrzeni.                                                                                        | 2                |
| <b>C6</b>  | Działania na macierzach, obliczanie wyznaczników stopnia 3.                                                                                                                              | 2                |
| <b>C7</b>  | Obliczanie wyznaczników wyższych stopni, metoda Gaussa.                                                                                                                                  | 2                |
| <b>C8</b>  | Wyznaczanie macierzy odwrotnej do danej, badanie rzędu macierzy.                                                                                                                         | 2                |
| <b>C9</b>  | Rozwiązywanie układów równań.                                                                                                                                                            | 2                |
| <b>C10</b> | Szukanie wartości i wektorów własnych.                                                                                                                                                   | 2                |
| <b>C11</b> | Zastosowanie iloczynu skalarnego, wektorowego, mieszanego do rozwiązywania zadań geometrycznych, badanie prostokątowości i równoległości wektorów, formy kwadratowe: stożkowe, kwadryki. | 4                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady

**N2** Konsultacje

**N3** Zadania tablicowe

**N4** Praca w grupach

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 60                                                      |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 30                                                      |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 10                                                      |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 50                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 0                                                       |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 0                                                       |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>150</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 5.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Kolokwia

**F2** Zadania tablicowe

**F3** Odpowiedź ustna

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Egzamin pisemny

### WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

**W1** Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

**W2** Egzamin jest w formie pisemnej (część zadaniowa)

**W3** Ocena końcowa jest średnią arytmetyczną ocen z ćwiczeń oraz oceny z egzaminu.

### KRYTERIA OCENY

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                                                                   |
|---------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie zna najważniejszych definicji i twierdzeń z zakresu algebry liniowej. |

|                     |                                                                                                                                                                                                                                 |
|---------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.0        | Student zna najważniejsze definicje i twierdzenia z zakresu przedmiotu, potrafi wyjaśnić zastosowanie ich w rozwiązywaniu zadań.                                                                                                |
| NA OCENĘ 3.5        | Student zna podstawowe definicje i twierdzenia, rozumie związki z najważniejszymi pojęciami, zna metody rozwiązywania podstawowych typów zadań praktycznych.                                                                    |
| NA OCENĘ 4.0        | Student zna wszystkie podane definicje i twierdzenia, potrafi wyjaśnić najważniejsze z nich oraz sposób zastosowania poznanego materiału teoretycznego do rozwiązywania podstawowych typów zadań.                               |
| NA OCENĘ 4.5        | Student zna i w pełni rozumie wszystkie podane definicje i twierdzenia, zna metody rozwiązywania wszystkich typów zadań omawianych na zajęciach.                                                                                |
| NA OCENĘ 5.0        | Student w pełni opanował cały materiał teoretyczny, zna metody rozwiązywania wszystkich typów zadań omówionych na zajęciach, potrafi wyjaśnić te metody w oparciu o poznany materiał teoretyczny.                               |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                                                                                                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie potrafi obliczać skomplikowane zadania z zakresu algebry liniowej.                                                                                                                                                  |
| NA OCENĘ 3.0        | Student potrafi obliczać skomplikowane zadania z zakresu algebry liniowej.                                                                                                                                                      |
| NA OCENĘ 3.5        | Student opanował wszystkie omówione metody rozwiązywania zadań z algebry liniowej.                                                                                                                                              |
| NA OCENĘ 4.0        | Student opanował wszystkie umiejętności na ocenę 3,5 i potrafi stosować je do rozwiązywania standardowych zadań z zakresu algebry liniowej.                                                                                     |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi obliczać skomplikowane zadania z algebry liniowej.                                                                                                                                                              |
| NA OCENĘ 5.0        | Student rozwiązuje skomplikowane zadania z algebry liniowej.                                                                                                                                                                    |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                                                                                                                                                                                                                 |
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie potrafi zapisać prostego rozumowania matematycznego.                                                                                                                                                                |
| NA OCENĘ 3.0        | Student potrafi zapisać proste rozumowanie matematyczne.                                                                                                                                                                        |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi poprawnie zredagować rozwiązanie zadania matematycznego, z wyjaśnieniem najważniejszych elementów rozwiązania.                                                                                                  |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi poprawnie zredagować rozwiązanie zadania matematycznego, ponadto wyjaśnić poszczególne elementy rozwiązania, potrafi samodzielnie zweryfikować poprawność prostego rozumowania matematycznego.                  |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi zredagować rozwiązanie skomplikowanego problemu matematycznego, z uwzględnieniem struktury logicznej rozwiązania i zależności pomiędzy poszczególnymi elementami rozwiązania, posługuje się wybraną literaturą. |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi zredagować skomplikowany tekst matematyczny, swobodnie posługuje się literaturą matematyczną, weryfikuje skomplikowane rozumowania matematyczne                                                                 |

| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                                                                                                                                                                                                                    |
|---------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Student nie potrafi wykonywać żadnego działania na macierzach, nie umie policzyć rzędu macierzy i wyznacznika, nie zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, nie potrafi rozwiązywać układów równań liniowych.            |
| NA OCENĘ 3.0        | Student potrafi wykonywać poprawnie działania na macierzach, liczy rząd macierzy i wyznacznik, zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, potrafi je zastosować do rozwiązywania prostych układów równań liniowych.        |
| NA OCENĘ 3.5        | Student potrafi wykonywać poprawnie działania na macierzach, liczy rząd macierzy i wyznacznik, zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, potrafi je zastosować do rozwiązywania układów równań liniowych.                 |
| NA OCENĘ 4.0        | Student potrafi wykonywać poprawnie działania na macierzach, liczy rząd macierzy i wyznacznik, zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, potrafi je zastosować do rozwiązywania skomplikowanych układów równań liniowych. |
| NA OCENĘ 4.5        | Student potrafi biegle wykonywać działania na macierzach, liczy rząd macierzy i wyznacznik, zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, potrafi je zastosować do rozwiązywania trudnych układów równań liniowych.           |
| NA OCENĘ 5.0        | Student potrafi biegle wykonywać działania na macierzach, liczy biegle rząd macierzy i wyznacznik, zna twierdzenia Cramera oraz Kroneckera-Capellego, potrafi je zastosować do rozwiązywania trudnych układów równań liniowych.    |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                                                                    | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|
| EK1               | K_W01 K_K01<br>K_K02 K_K03                                                     | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8<br>W9 W10 W11<br>W12 C1 C2 C3<br>C4 C5 C6 C7 C8<br>C9 C10 | N1 N2 N3              | F1 F2 P1      |
| EK2               | K_U01 K_U02<br>K_U03 K_U15<br>K_U16 K_U17                                      | Cel 1           | W5 W6 W7 W8<br>W9 W10 C1 C5<br>C6 C7 C8 C9<br>C10                                    | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 P1      |

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                                                                        | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|
| EK3               | K_W13 K_U01<br>K_K01 K_K02<br>K_K03                                            | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8<br>W9 W10 W11<br>W12 C1 C2 C3<br>C4 C5 C6 C7 C8<br>C9 C10 C11 | N1 N2 N3 N4           | F1 F2 F3 P1   |
| EK4               | K_W01 K_U02<br>K_U03 K_U15<br>K_U16                                            | Cel 1           | W1 W2 W3 W4<br>C1 C2 C3 C4                                                               | N1 N2 N3 N4           | F1 F3 P1      |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | L.Jeśmianowicz, J. Łoś — *Zbiór zadań z algebry*, Warszawa, 1975, PWN
- [2] | A.Mostowski,M.Stark — *Algebra liniowa*, Warszawa, 1976, PWN
- [3] | T.Jurlewicz,Z.Skoczylas — *Algebra liniowa 1*, Wrocław, 2001, GIS
- [4] | T.Jurlewicz,Z.Skoczylas- — *Algebra liniowa 2*, Wrocław, 2005, GIS

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Beata Kocel-Cynk (kontakt: bkocel@usk.pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

- 1 dr Beata Kocel-Cynk (kontakt: Beata.Kocel-Cynk1@pk.edu.pl)
- 2 dr hab. Włodzimierz Jelonek (kontakt: mail@example.com)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejscowość, data) (odpowiedzialny za przedmiot) (dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....  
 .....