

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2022/2023

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana

Profil: Praktyczny

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: MS

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii, Analityka Danych, Matematyka z Informatyką

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Algebra liniowa z geometrią analityczną
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Linear Algebra with Analytic Geometry
KOD PRZEDMIOTU	WiIT MS pIS C4 22/23
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty kierunkowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	7.00
SEMESTRY	1

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
1	45	45	0	0	0	0

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Nauczenie studentów podstawowych pojęć i metod algebry liniowej, teorii macierzy oraz geometrii analitycznej niezbędnych w innych dziedzinach Matematyki i aktywnie stosowanych we współczesnej inżynierii, ekonomii, kryptografii, teorii informacji itp.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Matematyka na poziomie maturalnym.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące przestrzeni wektorowych i odwzorowań liniowych oraz geometrii przestrzeni euklidesowych.

**EK2 Wiedza** Student zna i rozumie podstawowe pojęcia i twierdzenia dotyczące wielomianów, macierzy, wyznaczników, układów równań liniowych oraz liczb zespolonych (w szczególności związane z macierzami diagonalizowalnymi i postacią kanoniczną Jordana).

**EK3 Umiejętności** Student potrafi ilustrować przykładami podstawowe pojęcia algebry liniowej i geometrii analitycznej, jak również rozwiązywać typowe zadania z obu tych dziedzin.

**EK4 Umiejętności** Student potrafi rozwiązywać typowe zadania dotyczące wielomianów, macierzy, wyznaczników, układów równań liniowych oraz liczb zespolonych.

**EK5 Kompetencje społeczne** Student jest przygotowany do samodzielnego poszerzania i pogłębiania swojej wiedzy z zakresu algebry liniowej, teorii macierzy i geometrii analitycznej. Jest również przygotowany do dzielenia się tą wiedzą z niespecjalistami.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
<b>W1</b>	Półgrupy, monoidy i grupy. Permutacje (mnożenie, odwracanie, rozkład na cykle, transpozycje, parzystość). Pierścienie i ciała. Pierścień reszt modulo $n$ .	3
<b>W2</b>	Ciało liczb zespolonych. Płaszczyzna zespolona. Postaci algebraiczna, trygonometryczna i wykładnicza liczby zespolonej. Wzór de Moivre'a. Pierwiastki z liczb zespolonych.	4
<b>W3</b>	Pierścienie wielomianów jednej zmiennej. Wielomiany nierozkładalne. Faktorialność pierścieni wielomianów nad ciałem. NWD i NWW, dzielenie z resztą i algorytm Euklidesa w pierścieniach wielomianów. Pierwiastki wielomianów (twierdzenie Bezouta, krotność). Zasadnicze twierdzenie algebry i jego konsekwencje.	4
<b>W4</b>	Przestrzenie wektorowe. Kombinacje liniowe, liniowa niezależność. Generatory, baza i wymiar przestrzeni wektorowej. Współrzędne wektora względem bazy. Podprzestrzenie liniowe. Operacje na podprzestrzeniach (suma, przecięcie, suma prosta). Przestrzeń ilorazowa. Wymiar sumy podprzestrzeni i wymiar przestrzeni ilorazowej.	5
<b>W5</b>	Odwzorowania liniowe. Jądro i obraz. Mono-, epi- i izomorfizmy. Rząd i defekt odwzorowania liniowego. Formuła wymiaru. Izomorficzność przestrzeni wektorowych.	3

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W6	Macierze i działania na nich. Macierze diagonalne, symetryczne, antysymetryczne, trójkątne i nilpotentne. Definicja permutacyjna wyznacznika. Twierdzenie Cauchy'ego o wyznaczniku iloczynu. Wzór Laplace'a. Operacje elementarne na wierszach i kolumnach wyznacznika.	4
W7	Odwracanie macierzy. Pełna grupa liniowa (nad ciałem). Rząd macierzy. Macierze podobne. Macierz przejścia i transformacja współrzędnych wektora przy zmianie bazy. Macierze odwzorowań liniowych.	4
W8	Układy równań liniowych. Metoda eliminacji gaussowskiej. Układy jednorodne. Twierdzenie Cramera. Twierdzenie Kroneckera-Capelliego i metoda minora bazowego.	2
W9	Wartości i wektory własne macierzy. Wielomiany charakterystyczny i minimalny. Twierdzenie Cayleya-Hamiltona. Krotność algebraiczna i krotność geometryczna wartości własnej. Macierze diagonalizowalne. Suma prosta macierzy. Klatki jordanowskie. Twierdzenie o sprowadzaniu macierzy do postaci kanonicznej Jordana (bez dowodu).	5
W10	Pojęcie i podstawowe własności iloczynu skalarnego. Nierówność Cauchy'ego-Schwarza. Norma pochodząca od iloczynu skalarnego. Kąt między wektorami. Przestrzenie euklidesowe i przestrzenie unitarne. Bazy ortonormalne. Proces ortogonalizacji Grama-Schmidta. Projekcja ortogonalna na podprzestrzeń liniową. Dopełnienie ortogonalne zbioru.	4
W11	Elementy geometrii analitycznej w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej (iloczynny wektorowy i mieszany, pole równoległoboku i objętość równoległościanu, równanie płaszczyzny i jej przedstawienie parametryczne, przedstawienie parametryczne i układ równań krawędziowych prostej, wzajemne położenie dwóch prostych, dwóch płaszczyzn oraz prostej i płaszczyzny, odległość między punktem a prostą, między punktem a płaszczyzną, między dwiema prostymi, między dwiema płaszczyznami oraz między prostą a płaszczyzną).	3
W12	Macierze ortogonalne. Diagonalizowalność macierzy symetrycznych. Formy dwuliniowe i kwadratowe. Przekształcanie form kwadratowych do postaci kanonicznej (metoda Lagrange'a i metoda sprowadzania do osi głównych). Określoność form kwadratowych. Podstawowe informacje o krzywych i powierzchniach algebraicznych drugiego stopnia.	4

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Dalsze przykłady półgrup, monoidów, grup, pierścieni i ciał. Zadania dotyczące permutacji (w szczególności znajdowanie rozkładu na cykle, rozkładu na transpozycje i znaku). Obliczenia i rozwiązywanie prostych równań w pierścieniach reszt.	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C2	Rachunki na liczbach zespolonych (zwłaszcza z wykorzystaniem postaci trygonometrycznej i wykładniczej). Zadania dotyczące geometrii płaszczyzny zespolonej. Rozwiązywanie równań i układów równań z niewiadomymi zespolonymi (w szczególności wyznaczanie pierwiastków z liczb zespolonych).	4
C3	Zadania dotyczące dzielenia z resztą, algorytmu Euklidesa, NWD i NWW w pierścieniach wielomianów jednej zmiennej. Badanie nierozkładalności wielomianów. Znajdowanie rozkładów na czynniki nierozkładalne. Rozwiązywanie równań wielomianowych.	4
C4	Dalsze przykłady przestrzeni wektorowych. Zadania dotyczące liniowej niezależności i podprzestrzeni liniowych. Znajdowanie generatorów, baz i wymiarów różnych przestrzeni wektorowych.	5
C5	Badanie liniowości odwzorowań. Wyznaczanie jądra i obrazu odwzorowania liniowego. Znajdowanie rzędu i defektu. Odwracanie izomorfizmów liniowych. Zadania dotyczące izomorficzności przestrzeni wektorowych (zwłaszcza w kontekście przestrzeni ilorazowych).	4
C6	Wykonywanie obliczeń na macierzach. Obliczanie wyznaczników. Rozwiązywanie równań macierzowych i wyznacznikowych.	4
C7	Odwracanie macierzy. Rozwiązywanie równań macierzowych przy pomocy macierzy odwrotnych. Wyznaczanie rzędów. Badanie, czy dane macierze są podobne. Zadania dotyczące macierzy odwzorowań liniowych w różnych bazach oraz macierzy przejścia.	5
C8	Rozwiązywanie układów równań liniowych.	3
C9	Wyznaczanie wartości i podprzestrzeni własnych macierzy. Zadania dotyczące twierdzenia Cayleya-Hamiltona (w szczególności odwracanie macierzy przy użyciu tego twierdzenia). Zadania dotyczące macierzy diagonalizowalnych. Proste przykłady sprowadzania macierzy do postaci kanonicznej Jordana.	5
C10	Dalsze przykłady iloczynów skalarnych. Zadania dotyczące długości wektorów i kątów między wektorami. Zadania dotyczące ortogonalizacji Grama-Schmidta. Wyznaczanie rzutów prostopadłych i dopełnień ortogonalnych.	3
C11	Zadania o prostych i płaszczyznach w trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej.	3
C12	Sprowadzanie form kwadratowych do postaci kanonicznej i badanie ich określoności.	2

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykłady (w razie konieczności odbywające się w formie telekonferencji).

**N2** Zadania tablicowe (w razie konieczności omawiane i rozwiązywane za pośrednictwem internetu).

**N3** Dyskusja (w razie konieczności prowadzona zdalnie).

**N4** Konsultacje (w razie konieczności odbywające się za pośrednictwem internetu).

**N5** Kurs e-learningowy.

**N6** Projekt zespołowy.

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
<b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>	
Godziny wynikające z planu studiów	90
Konsultacje przedmiotowe	12
Egzaminy i zaliczenia w sesji	5
<b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b>	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	85
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	18
<b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>	<b>210</b>
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	7.00

## 9 SPOSOBY OCENY

W razie konieczności zarówno sprawdziany na ćwiczeniach, jak i obie części egzaminu mogą odbywać się za pośrednictwem platformy e-learningowej oraz usługi MS Teams.

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Sprawdziany z bieżącego materiału (na ćwiczeniach).

**F2** Projekt zespołowy.

**F3** Merytoryczna aktywność na zajęciach.

**F4** Egzamin pisemny (składający się z zadań rachunkowych i testu wielokrotnego wyboru).

**F5** Egzamin ustny.

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Średnia ważona ocen formujących.

**WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU**

- W1** Warunkiem koniecznym i wystarczającym dopuszczenia do egzaminu pisemnego jest uzyskanie więcej niż połowy największej możliwej sumarycznej liczby punktów ze wszystkich sprawdzianów i przedłożenie akceptowalnego opracowania projektu zespołowego.
- W2** Warunkiem koniecznym i wystarczającym dopuszczenia do egzaminu ustnego jest uzyskanie więcej niż połowy największej możliwej sumarycznej liczby punktów z części zadaniowej i testowej egzaminu pisemnego.
- W4** Na pozytywną ocenę końcową z przedmiotu – otrzymuje ją student, który zdał egzamin ustny – składa się sumaryczny wynik sprawdzianów (z wagą 0,35), ocena projektu zespołowego (z wagą 0,15), wynik egzaminu pisemnego (z wagą 0,4) oraz wynik egzaminu ustnego (z wagą 0,1).

**OCENA AKTYWNOŚCI BEZ UDZIAŁU NAUCZYCIELA****B1** Test**KRYTERIA OCENY**

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 3.0	Student poprawnie formułuje definicje i twierdzenia, o których mowa w opisie efektu kształcenia. Potrafi zilustrować je prostymi przykładami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 3.0	Student poprawnie formułuje definicje i twierdzenia, o których mowa w opisie efektu kształcenia. Potrafi zilustrować je prostymi przykładami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 3.0	Student poprawnie (z dokładnością do drobnych błędów rachunkowych) rozwiązuje zadania zbliżone do omawianych na zajęciach.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 3.0	Student poprawnie (z dokładnością do drobnych błędów rachunkowych) rozwiązuje zadania zbliżone do omawianych na zajęciach.
EFEKT KSZTAŁCENIA 5	
NA OCENĘ 3.0	Student potrafi znaleźć w literaturze i/lub źródłach internetowych informacje potrzebne do wykonania projektu zespołowego. W zrozumiały sposób komentuje rozwiązania zadań.

**10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU**

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_W04 K_W11	Cel 1	W1 W4 W5 W6 W7 W10 W11 W12	N1 N3 N4 N5 N6	F2 F3 F5 P1
EK2	K_W01 K_W04 K_W11	Cel 1	W2 W3 W6 W7 W8 W9	N1 N3 N4 N5 N6	F2 F3 F5 P1
EK3	K_U08	Cel 1	C1 C4 C5 C7 C10 C11 C12	N2 N3 N4 N5 N6	F1 F2 F3 F4 F5 P1
EK4	K_U08	Cel 1	C2 C3 C6 C7 C8 C9	N2 N3 N4 N5 N6	F1 F2 F3 F4 F5 P1
EK5	K_U29 K_U30 K_U35 K_K01	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7 C8 C9 C10 C11 C12	N3 N4 N6	F2 F3 F5 P1

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | **G. Banaszak, W. Gajda** — *Elementy algebry liniowej (obie części)*, Warszawa, 2002, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
- [2] | **J. Gancarzewicz** — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2009, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego
- [3] | **J. Klukowski, I. Nabiałek** — *Algebra dla studentów*, Warszawa, 2012, Wydawnictwo WNT
- [4] | **F. Leja** — *Geometria analityczna*, Warszawa, 1977, Państwowe Wydawnictwo Naukowe
- [5] | **S. Przybyło, A. Szlachtowski** — *Algebra i wielowymiarowa geometria analityczna w zadaniach*, Warszawa, 2015, Wydawnictwo WNT
- [6] | **J. Rutkowski** — *Algebra liniowa w zadaniach*, Warszawa, 2012, Wydawnictwo Naukowe PWN

### LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | **P. Kajetanowicz, J. Wierzejewski** — *Algebra z geometrią analityczną*, Warszawa, 2008, Wydawnictwo Naukowe PWN
- [2] | **A. I. Kostrikin (red.)** — *Zbiór zadań z algebry*, Warszawa, 2012, Wydawnictwo Naukowe PWN
- [3] | **I. Nabiałek** — *Zadania z algebry liniowej*, Warszawa, 2006, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne

## 12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

### OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr Marcin Skrzyński (kontakt: marcin.skrzynski@pk.edu.pl)

### OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

1 dr Marcin Skrzyński (kontakt: marcin.skrzynski@pk.edu.pl)

## 13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

---

(miejsowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....