

# POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

## KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2023/2024

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka Stosowana

Profil: Praktyczny

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: MS

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka z Informatyką, Analityka Danych

### 1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

|                                         |                            |
|-----------------------------------------|----------------------------|
| NAZWA PRZEDMIOTU                        | Algebra stosowana          |
| NAZWA PRZEDMIOTU<br>W JĘZYKU ANGIELSKIM | Applied Algebra            |
| KOD PRZEDMIOTU                          | WiT MS pIS D1 23/24        |
| KATEGORIA PRZEDMIOTU                    | Przedmioty specjalnościowe |
| LICZBA PUNKTÓW ECTS                     | 5.00                       |
| SEMESTRY                                | 4                          |

### 2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

| SEMESTR | WYKŁAD | ĆWICZENIA | LABORATORIUM | LABORATORIUM<br>KOMPUTERO-<br>WE | SEMINARIUM | PROJEKT |
|---------|--------|-----------|--------------|----------------------------------|------------|---------|
| 4       | 30     | 30        | 0            | 0                                | 0          | 0       |

### 3 CELE PRZEDMIOTU

**Cel 1** Zapoznanie studentów z wybranymi pojęciami, twierdzeniami i metodami algebry oraz zaawansowanej teorii macierzy mającymi istotne zastosowania praktyczne (zwłaszcza w numeryce, informatyce i analizie danych).

**Cel 2** Wyposażenie studentów w wiedzę i zaawansowane narzędzia algebraiczne oraz teoriomacierzowe potrzebne do opanowania takich przedmiotów jak równania różniczkowe i różnicowe, metody numeryczne, wstęp do analizy danych, elementy sztucznej inteligencji, uczenie maszynowe.

## 4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

- 1 Zaliczenie przedmiotów algebra liniowa z geometrią analityczną, algebra z teorią liczb, grafy i algorytmy grafowe, analiza matematyczna, technologie informacyjne oraz pakiety matematyczne.

## 5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

**EK1 Wiedza** Student dysponuje pogłębioną wiedzą z teorii macierzy oraz zna podstawowe własności algebraiczne i geometryczne kwaternionów hamiltonowskich.

**EK2 Wiedza** Student zna i rozumie typowe zastosowania kwaternionów oraz zaawansowanej teorii macierzy w numeryce, informatyce i analizie danych.

**EK3 Umiejętności** Student potrafi stosować poznane pojęcia i metody algebry do rozwiązywania zadań praktycznych (zwłaszcza obliczeniowych oraz z zakresu modelowania komputerowego i analizy danych).

**EK4 Kompetencje społeczne** Student jest przygotowany do samodzielnego poszerzania swojej wiedzy i doskonalenia umiejętności w dziedzinie algebry i jej zastosowań.

## 6 TREŚCI PROGRAMOWE

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                          |                  |
|-----------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                                                   | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W1</b> | Przypomnienie i uzupełnienie wiadomości z algebry liniowej, algebry ogólnej, teorii grafów i analizy matematycznej.                                                                                                                                                                                                      | 3                |
| <b>W2</b> | Rozszerzenie wiadomości o wartościach i wektorach własnych (macierze z dominującą diagonalą, twierdzenie Gerszgorina i jego konsekwencje, macierz towarzysząca wielomianu, wartości i wektory własne potęgi macierzy).                                                                                                   | 3                |
| <b>W3</b> | Faktoryzacje macierzy: rozkład na macierze pełnego rzędu, rozkłady LU i Choleskiego, rozkłady QR i biegunowy, rozkład SVD. Zastosowania faktoryzacji macierzy w numeryce, informatyce i analizie danych (rozwiązywanie układów równań liniowych, kompresja danych, redukcja wymiarowości).                               | 5                |
| <b>W4</b> | Projekcje ortogonalne i pseudorozwiązania układów równań liniowych. Metoda najmniejszych kwadratów w zagadnieniach aproksymacyjnych.                                                                                                                                                                                     | 3                |
| <b>W5</b> | Uogólnione macierze odwrotne Moore'a-Penrose'a i ich zastosowania.                                                                                                                                                                                                                                                       | 3                |
| <b>W6</b> | Macierze kwadratowe o elementach nieujemnych (twierdzenie Perrona i wzór Collatza-Wielandta, nieredukowalność, charakteryzacja teoriografowa macierzy nieredukowalnych, twierdzenie Perrona-Frobeniusa, faktoryzacja nieujemna) i ich zastosowania: model Leontiefa w ekonometrii, grupowanie danych, algorytm PageRank. | 5                |
| <b>W7</b> | Funkcja wykładnicza zmiennej macierzowej.                                                                                                                                                                                                                                                                                | 3                |

| WYKŁAD    |                                                                                                                                                                                                                                                                                        |                  |
|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                 | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>W8</b> | Kwaterniony hamiltonowskie (różne podejścia do definicji, algebra z dzieleniem $H(R)$ , postać trygonometryczna kwaternionu, reprezentacje macierzowa i kwaternionowa obrotu trójwymiarowej przestrzeni euklidesowej) oraz ich zastosowania: grafika i animacja komputerowa, robotyka. | 5                |

| ĆWICZENIA |                                                                                                                                                                                                                                                                                                   |                  |
|-----------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------|
| LP        | TEMATYKA ZAJĘĆ<br>OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH                                                                                                                                                                                                                                            | LICZBA<br>GODZIN |
| <b>C1</b> | Zadania powtórzeniowe z algebry liniowej, algebry ogólnej, teorii grafów i analizy matematycznej (zwłaszcza dotyczące eliminacji gaussowskiej, wartości i wektorów własnych oraz norm w przestrzeniach wektorowych).                                                                              | 3                |
| <b>C2</b> | Zadania i problemy dotyczące wielomianu charakterystycznego oraz wartości i wektorów własnych, ze szczególnym naciskiem na zastosowania twierdzenia Gerszgorina.                                                                                                                                  | 3                |
| <b>C3</b> | Rozwiązywanie (z użyciem wspomagania komputerowego) zadań i problemów dotyczących różnych faktoryzacji macierzy i zastosowań tych faktoryzacji.                                                                                                                                                   | 4                |
| <b>C4</b> | Zadania rachunkowe dotyczące projekcji ortogonalnych na podprzestrzenie liniowe w przestrzeniach euklidesowych. Znajdowanie pseudorozwiązań nad- i podokreślonych układów równań. Rozwiązywanie zadań aproksymacyjnych metodą najmniejszych kwadratów.                                            | 4                |
| <b>C5</b> | Wyznaczanie różnymi metodami, także z użyciem wspomagania komputerowego, uogólnionych macierzy odwrotnych Moore'a-Penrose'a. Rozwiązywanie za pomocą tych macierzy podokreślonych układów równań liniowych i zadań dotyczących regresji liniowej.                                                 | 4                |
| <b>C6</b> | Rozwiązywanie – również z użyciem wspomagania komputerowego – zadań i problemów dotyczących Perrona-Frobeniusa teorii macierzy o elementach nieujemnych (w szczególności sprawdzanie, czy taka macierz jest nieredukowalna) oraz faktoryzacji nieujemnej. Analiza prostych przykładów zastosowań. | 4                |
| <b>C7</b> | Obliczanie różnymi sposobami eksponent macierzy kwadratowych. Logarytmowanie macierzy.                                                                                                                                                                                                            | 3                |
| <b>C8</b> | Zadania rachunkowe dotyczące arytmetyki i algebry kwaternionów. Analiza (z użyciem wspomagania komputerowego) prostych przykładów zastosowań kwaternionów.                                                                                                                                        | 5                |

## 7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

**N1** Wykład (po części w formie tradycyjnej, po części w formie prezentacji multimedialnej; w razie konieczności prowadzony za pośrednictwem internetu).

**N2** Ćwiczenia tablicowe (w razie konieczności w formie telekonferencji).

**N3** Dyskusja (w razie konieczności za pośrednictwem internetu).

**N4** Referaty studenckie (przedstawiające wyniki „projektów” indywidualnych lub grupowych, zawsze mające LaTeXowską wersję pisemną).

**N5** Kurs e-learningowy.

## 8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

| FORMA AKTYWNOŚCI                                                                                 | ŚREDNIA LICZBA GODZIN<br>NA ZREALIZOWANIE<br>AKTYWNOŚCI |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|
| <b>Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:</b>                                     |                                                         |
| Godziny wynikające z planu studiów                                                               | 60                                                      |
| Konsultacje przedmiotowe                                                                         | 12                                                      |
| Egzaminy i zaliczenia w sesji                                                                    | 4                                                       |
| <b>Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:</b> |                                                         |
| Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury                               | 58                                                      |
| Opracowanie wyników                                                                              | 0                                                       |
| Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji                                           | 16                                                      |
| <b>SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z<br/>CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA</b>    | <b>150</b>                                              |
| SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU                                                    | 5.00                                                    |

## 9 SPOSOBY OCENY

W razie konieczności zarówno bieżące sprawdziany, jak i test zaliczeniowy mogą odbywać się za pośrednictwem platformy e-learningowej.

### OCENA FORMUJĄCA

**F1** Krótkie sprawdziany na ćwiczeniach i wykładach („kartkówki”).

**F2** Przedkładanie na piśmie rozwiązań zadań domowych.

**F3** Referaty.

**F4** Test zaliczeniowy.

### OCENA PODSUMOWUJĄCA

**P1** Średnia ważona ocen formujących.

**WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU**

**W1** Dla każdego z osobna z trzech następujących zakresów: kartkówki, zadania domowe/referaty, test zaliczeniowy – oblicza się iloraz sumarycznej liczby punktów zdobytych przez studenta przez maksymalną możliwą sumaryczną liczbę punktów. Oznaczmy te ilorazy przez  $S_k$ ,  $S_z$ ,  $S_t$  (odpowiednio). Student otrzymuje zaliczenie przedmiotu wtedy i tylko wtedy, gdy  $S := 0,3 * S_k + 0,3 * S_z + 0,4 * S_t > 0,5$ .

**W2** Dopuszczalne są co najwyżej dwie nieusprawiedliwione nieobecności na ćwiczeniach.

**KRYTERIA OCENY**

| EFEKT KSZTAŁCENIA 1 |                                             |
|---------------------|---------------------------------------------|
| NA OCENĘ 2.0        | Liczba S nie przekracza 0,5.                |
| NA OCENĘ 3.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,5;0,6]. |
| NA OCENĘ 3.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,6;0,7]. |
| NA OCENĘ 4.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,7;0,8]. |
| NA OCENĘ 4.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,8;0,9]. |
| NA OCENĘ 5.0        | $S > 0,9$                                   |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 2 |                                             |
| NA OCENĘ 2.0        | Liczba S nie przekracza 0,5.                |
| NA OCENĘ 3.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,5;0,6]. |
| NA OCENĘ 3.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,6;0,7]. |
| NA OCENĘ 4.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,7;0,8]. |
| NA OCENĘ 4.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,8;0,9]. |
| NA OCENĘ 5.0        | $S > 0,9$                                   |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 3 |                                             |
| NA OCENĘ 2.0        | Liczba S nie przekracza 0,5.                |
| NA OCENĘ 3.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,5;0,6]. |
| NA OCENĘ 3.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,6;0,7]. |
| NA OCENĘ 4.0        | Liczba S mieści się w przedziale (0,7;0,8]. |
| NA OCENĘ 4.5        | Liczba S mieści się w przedziale (0,8;0,9]. |
| NA OCENĘ 5.0        | $S > 0,9$                                   |
| EFEKT KSZTAŁCENIA 4 |                                             |
| NA OCENĘ 2.0        | Liczba S nie przekracza 0,5.                |

|              |                                             |
|--------------|---------------------------------------------|
| NA OCENĘ 3.0 | Liczba S mieści się w przedziale (0,5;0,6]. |
| NA OCENĘ 3.5 | Liczba S mieści się w przedziale (0,6;0,7]. |
| NA OCENĘ 4.0 | Liczba S mieści się w przedziale (0,7;0,8]. |
| NA OCENĘ 4.5 | Liczba S mieści się w przedziale (0,8;0,9]. |
| NA OCENĘ 5.0 | $S > 0,9$                                   |

## 10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

| EFEKT KSZTAŁCENIA | ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU | CELE PRZEDMIOTU | TREŚCI PROGRAMOWE                                        | NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE | SPOSOBY OCENY |
|-------------------|--------------------------------------------------------------------------------|-----------------|----------------------------------------------------------|-----------------------|---------------|
| EK1               | K_W01 K_W04<br>K_W12                                                           | Cel 1 Cel 2     | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8                               | N1 N3 N4 N5           | F1 F3 F4 P1   |
| EK2               | K_W01 K_W04<br>K_W12                                                           | Cel 1 Cel 2     | W2 W3 W4 W5<br>W6 W7 W8                                  | N1 N3 N4 N5           | F1 F3 F4 P1   |
| EK3               | K_U08                                                                          | Cel 2           | C1 C2 C3 C4 C5<br>C6 C7 C8                               | N2 N3 N5              | F1 F2 F4 P1   |
| EK4               | K_U30 K_U35<br>K_K01                                                           | Cel 1 Cel 2     | W1 W2 W3 W4<br>W5 W6 W7 W8<br>C1 C2 C3 C4 C5<br>C6 C7 C8 | N3 N4 N5              | F3 P1         |

## 11 WYKAZ LITERATURY

### LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | **J. Gancarzewicz** — *Algebra liniowa i jej zastosowania*, Kraków, 2009, Wydawnictwo Uniwersytetu Jagiellońskiego
- [2] | **A. Kiełbasiński, H. Schwetlick** — *Numeryczna algebra liniowa: wprowadzenie do obliczeń zautomatyzowanych*, Warszawa, 1994, Wydawnictwa Naukowo-Techniczne
- [3] | **J. Komorowski** — *Od liczb zespolonych do tensorów, spinorów, algebr Liego i kwadryk*, Warszawa, 1978, Państwowe Wydawnictwo Naukowe

**LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA**

- [1] | **S. Białas** — *Macierze: wybrane problemy*, Kraków, 2006, AGH Uczelniane Wydawnictwa Naukowo-Dydaktyczne
- [2] | **A. J. Laub** — *Matrix Analysis for Scientists and Engineers*, Philadelphia, 2005, SIAM
- [3] | **C. D. Meyer** — *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*, Philadelphia, 2000, SIAM
- [4] | **D. Serre** — *Matrices. Theory and Applications*, New York, 2010, Springer

**LITERATURA DODATKOWA**

- [1] | **A. N. Langville, C. D. Meyer** — *Google's PageRank and beyond. The science of search engine rankings*, Princeton, 2006, Princeton University Press

**12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH****OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ**

dr Marcin Skrzyński (kontakt: [marcin.skrzynski@pk.edu.pl](mailto:marcin.skrzynski@pk.edu.pl))

**OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT**

2 dr Marcin Skrzyński (kontakt: [mskrzynski@pk.edu.pl](mailto:mskrzynski@pk.edu.pl))

**13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI**

---

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

**PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI** (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....