

POLITECHNIKA KRAKOWSKA IM. TADEUSZA KOŚCIUSZKI

KARTA PRZEDMIOTU

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2023/2024

Wydział Informatyki i Telekomunikacji

Kierunek studiów: Matematyka

Profil: Ogólnoakademicki

Forma studiów: stacjonarne

Kod kierunku: M

Stopień studiów: II

Specjalności: Modelowanie matematyczne, Matematyka w finansach i ekonomii

1 INFORMACJE O PRZEDMIOCIE

NAZWA PRZEDMIOTU	Analiza matematyczna
NAZWA PRZEDMIOTU W JĘZYKU ANGIELSKIM	Mathematical analysis
KOD PRZEDMIOTU	WiT M oIIS C1 23/24
KATEGORIA PRZEDMIOTU	Przedmioty kierunkowe
LICZBA PUNKTÓW ECTS	10.00
SEMESTRY	1

2 RODZAJ ZAJĘĆ, LICZBA GODZIN W PLANIE STUDIÓW

SEMESTR	WYKŁAD	ĆWICZENIA	LABORATORIUM	LABORATORIUM KOMPUTERO- WE	SEMINARIUM	PROJEKT
1	60	60	0	0	0	0

3 CELE PRZEDMIOTU

Cel 1 Zapoznanie studentów z podstawowymi faktami teorii miary i całki Lebesgue'a; przestrzeń L_p .

Cel 2 Formy różniczkowe oraz ich całkowanie.

4 WYMAGANIA WSTĘPNE W ZAKRESIE WIEDZY, UMIEJĘTNOŚCI I INNYCH KOMPETENCJI

1 Zaliczony pierwszy stopień studiów matematycznych.

5 EFEKTY KSZTAŁCENIA

EK1 Wiedza Student poznaje podstawy teorii miary, miary i całki Lebesgue'a i przestrzenie L_p .

EK2 Umiejętności Student potrafi sprawdzać czy dane odwzorowanie jest miarą, mierzalność zbiorów i funkcji, stosować twierdzenie Fubini'ego i twierdzenie o zmianie zmiennych. Student umie stosować poznane fakty do obliczania całek wielokrotnych, całek z form różniczkowych i uzasadniać poprawność wykonywanych operacji.

EK3 Wiedza Student poznaje formy różniczkowe, działania na formach i ich własności oraz ich całkowanie na podrozmiarowościach R_n .

EK4 Umiejętności Student potrafi wykonywać podstawowe działania na formach różniczkowych, obliczać całki z form różniczkowych na podrozmiarowościach R_n (szczególnie całki krzywoliniowe i powierzchniowe) oraz znać ich zastosowania.

6 TREŚCI PROGRAMOWE

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W1	Definicja sigma ciała - własności i przykłady.	2
W2	Miara i jej własności.	2
W3	Miara zewnętrzna, twierdzenie Caratheodory'ego	3
W4	Miara Lebesgue'a, charakteryzacja zbiorów mierzalnych w sensie Lebesgue'a.	3
W5	Funkcje mieralne, warunki równoważne, przykłady.	2
W6	Działania na funkcjach mieralnych.	2
W7	Funkcje proste i ich całkowanie, własności całek z funkcji prostych.	4
W8	Funkcje mieralne nieujemne jako granice rosnących ciągów funkcji prostych, całka z funkcji mieralnej nieujemnej.	3
W9	Podstawowe własności całek z funkcji mieralnych nieujemnych.	2
W10	Twierdzenie o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, lemat Fatou.	2
W11	Całka Lebesgue'a, definicja i własności.	2
W12	Twierdzenia Lebesgue'a o monotonicznym i o zmajoryzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki.	2
W13	Związek Całki Riemanna z całką Lebesgue'a, zasada Cavalieriego.	2

WYKŁAD		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
W14	Twierdzenia: Tonelly'ego i Fubini'ego.	2
W15	Twierdzenie o zmianie zmiennych w całce Lebesgue'a.	2
W16	Odwzorowania p-liniowe znakovienne, działania algebraiczne i iloczyn zewnętrzny, baza przestrzeni odwzorowań p-liniowych znakoviennych i jej postać.	3
W17	Formy różniczkowe stopnia p - własności, postać kanoniczna i klasa.	3
W18	Różniczka zewnętrzna formy różniczkowej i jej własności.	2
W19	Zmiana zmiennych w formie różniczkowej.	2
W20	Pierwotna formy różniczkowej, twierdzenie Poincarego.	3
W21	Całka krzywoliniowa zorientowana i jej obliczanie oraz zastosowania, niezależność od drogi całkowania.	3
W22	Orientacja podrozmaitości R_n , twierdzenie Greena - Riemanna.	3
W23	Całka powierzchniowa zorientowana i jej związek z całką powierzchniową niezorientowaną, Twierdzenia Greena - Gaussa - Ostrogradskiego.	3
W24	Twierdzenie Stokesa, elementy teorii pól wektorowych.	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C1	Sprawdzanie czy dana rodzina jest sigma-ciałem, wyznaczanie własności sumy, przecięcia sigma -ciał, pierścienie, sigma-pierścienie, ciała podzbiorów danego zbioru	2
C2	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą, wykorzystanie własności miary przy dowodzeniu własności nie podanych na wykładzie, miary liczące, atomowe	3
C3	Sprawdzanie czy dana funkcja jest miarą zewnętrzną, konstruowanie miar przy pomocy twierdzenia Caratheodory'ego, zupełność	3
C4	Wykazywanie własności m-wymiarowa miary zewnętrznej Lebesguea, zbiór Cantora, zbiór Vitaliego	2
C5	Sprawdzanie mierzalności funkcji względem danego sigma-ciała, konstruowanie sigma-ciał generowanych przez funkcje	2
C6	Działania na funkcjach mierzalnych	2

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C7	Przypomnienie wiadomości o szeregach liczbowych, całkowanie funkcji prostej nieujemnej, całka funkcji Dirichleta, całka funkcji skokowej Heavisidea, własności całki funkcji prostej	4
C8	Całkowanie funkcji mierzalnej nieujemnej, konstruowanie ciągu aproksymującego funkcję mierzalną nieujemną w przypadku przestrzeni ciągów oraz przestrzeni funkcji rzeczywistych	3
C9	Badanie całkowalności funkcji, wykorzystanie warunku koniecznego na całkowalność oraz warunku wystarczającego	2
C10	Zastosowanie twierdzenia o monotonicznym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki, zastosowanie lematu Fatou	2
C11	Całka Lebesguea	2
C12	Zastosowanie twierdzenia Lebesguea o zmajorzowanym przechodzeniu do granicy pod znakiem całki	2
C13	Wykorzystanie związku całki Riemanna z całką Lebesguea, wykorzystanie sum całkowych Riemanna do wyznaczania sum szeregów, wykorzystanie zasady Cavalieriego, geometryczna interpretacja całki funkcji nieujemnej	2
C14	Zastosowania twierdzeń: Tonellyego i Fubiniiego	2
C15	Zamiana zmiennych w całce Lebesguea	2
C16	Przypomnienie własności odwzorowań liniowych i wieloliniowych, sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest p-liniowe znakozmienne, struktura przestrzeni $Ap(E;F)$, mnożenie zewnętrzne odwzorowań wieloliniowych znakozmiennych i wykorzystanie jego własności, obliczanie iloczynu zewnętrznego k-form liniowych, wyznaczanie bazy przestrzeni $Ap(R_k; R)$, wykorzystanie domkniętości przestrzeni $Ap(R_k; R)$, przestrzeń $Ap(R_k; R)$ jako przestrzeń unitarna	2
C17	Sprawdzanie czy dane odwzorowanie jest formą różniczkową, postać kanoniczna	2
C18	Wykonywanie operacji na formach różniczkowych: iloczyn zewnętrzny, różniczka zewnętrzna, zmiana zmiennych w formie różniczkowej	4
C19	Wyznaczanie pierwotnej formy, badanie zamkniętości formy, wykorzystanie twierdzenia Poincarego	2
C20	Przypomnienie definicji łuku, krzywej, podrozmaitości jednowymiarowej, badanie zgodności orientacji krzywej z wyborem parametryzacji, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej, wykorzystanie niezależności od parametryzacji krzywej, całkowanie formy różniczkowej zamkniętej, cykl, badanie czy krzywe są homotopijne, zbiór p-spójny, obliczanie całki krzywoliniowej zorientowanej jako granicy ciągu sum całkowych, zastosowanie całki krzywoliniowej	3

ĆWICZENIA		
LP	TEMATYKA ZAJĘĆ OPIS SZCZEGÓŁOWY BLOKÓW TEMATYCZNYCH	LICZBA GODZIN
C21	Podrozmaitości orientowalne, wstęga Möbiusa, sprawdzanie czy dany zbiór jest kompaktem, kompaktem z brzegiem, kompaktem z brzegiem na podrozmaitości, sprawdzanie zgodności orientacji, obliczanie całki formy różniczkowej stopnia drugiego w przestrzeni R^2 , zastosowanie twierdzenia Greena-Riemanna, obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
C22	Obliczanie całki powierzchniowej zorientowanej, wykorzystanie własności całki powierzchniowej zorientowanej	3
C23	Definicja całki formy różniczkowej stopnia trzeciego w R^3 , zastosowania twierdzenia Greena-Gaussa-Ostrogradskiego	3
C24	Zastosowania twierdzenia Stokesa, wyznaczanie dywergencji, rotacji, gradientu pola	3

7 NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE

N1 Wykłady. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

N2 Zadania tablicowe. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

N3 Konsultacje. W sytuacji zdalnego nauczania prowadzone są za pośrednictwem MS Teams, na żywo.

N4 Praca w grupach

N5 E-learning (platforma Moodle i MF Teams)

8 OBCIĄŻENIE PRACĄ STUDENTA

FORMA AKTYWNOŚCI	ŚREDNIA LICZBA GODZIN NA ZREALIZOWANIE AKTYWNOŚCI
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	120
Konsultacje przedmiotowe	40
Egzaminy i zaliczenia w sesji	10
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	110
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
zapoznanie się z materiałami na platformie e-learningowej, przygotowanie do egzaminu	20
SUMARYCZNA LICZBA GODZIN DLA PRZEDMIOTU WYNIKAJĄCA Z CAŁEGO NAKŁADU PRACY STUDENTA	300
SUMARYCZNA LICZBA PUNKTÓW ECTS DLA PRZEDMIOTU	10.00

9 SPOSOBY OCENY

Obok obowiązkowej obecności warunkiem otrzymania zaliczenia z ćwiczeń jest uzyskanie co najmniej 50

OCENA FORMUJĄCA

F1 Kolokwium. W sytuacji zdalnego nauczania wszystkie sprawdziany prowadzone są za pośrednictwem platformy Moodle i MF Teams

F2 Odpowiedź ustna

OCENA PODSUMOWUJĄCA

P1 Egzamin pisemny

P2 Egzamin ustny

P3 Średnia ważona ocen formujących

WARUNKI ZALICZENIA PRZEDMIOTU

W1 Do egzaminu mogą przystąpić studenci, którzy otrzymali zaliczenie z ćwiczeń.

W2 Egzamin składa się z części pisemnej i części ustnej.

W3 Ocena końcowa jest średnią ważoną ocen P1, P2, P3.

KRYTERIA OCENY

EFEKT KSZTAŁCENIA 1	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał wiedzy o której mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia z podanej listy.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na przynajmniej jedno z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na dwa z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student rozumiejąc zależności między poznanymi pojęciami, definicjami i twierdzeniami potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia i na dodatkowe pytania związane z wylosowanymi zagadnieniami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 2	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału oraz uzyskał przy tym więcej niż połowę maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić oraz uzyskał przy tym więcej niż 60% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 70% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ściśle uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 80% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.

NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 90% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
EFEKT KSZTAŁCENIA 3	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał wiedzy o której mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, tzn. potrafi ze zrozumieniem podawać definicje, twierdzenia i przykłady przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia z podanej listy.
NA OCENĘ 3.5	Student zna w dostatecznym stopniu pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je zilustrować przykładami i potrafi podać idee dowodów podstawowych twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na przynajmniej jedno z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, podawać przykłady i kontrprzykłady ilustrujące te twierdzenia, zna dowody podstawowych twierdzeń oraz ich zastosowania przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na dwa z wylosowanych trzech zagadnień.
NA OCENĘ 4.5	Student potrafi w sposób zrozumiały formułować twierdzenia, ilustrować je przykładami, zna idee dowodów wszystkich twierdzeń oraz pełne dowody podstawowych przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi w sposób bezbłędny formułować twierdzenia, podawać przykłady oraz prezentować pełne dowody wszystkich twierdzeń przy odpowiedzi na trzy wylosowane zagadnienia. Ponadto student rozumiejąc zależności między poznanymi pojęciami, definicjami i twierdzeniami potrafi odpowiedzieć w sposób pełny na wszystkie trzy wylosowane zagadnienia i na dodatkowe pytania związane z wylosowanymi zagadnieniami.
EFEKT KSZTAŁCENIA 4	
NA OCENĘ 2.0	Student nie wykazał umiejętności, o których mowa w kryterium na ocenę 3.
NA OCENĘ 3.0	Student w dostatecznym stopniu potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału oraz uzyskał przy tym więcej niż połowę maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 3.5	Student potrafi wykorzystywać podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału, umie je uzasadnić oraz uzyskał przy tym więcej niż 60% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 4.0	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 70% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.

NA OCENĘ 4.5	Student potrafi wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach, podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 80% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.
NA OCENĘ 5.0	Student potrafi bezbłędnie wykorzystywać twierdzenia i metody poznane na wykładach i podawać precyzyjne, ścisłe uzasadnienia poprawności swoich rozumowań oraz uzyskał przy tym więcej niż 90% maksymalnej sumarycznej liczby punktów.

10 MACIERZ REALIZACJI PRZEDMIOTU

EFEKT KSZTAŁCENIA	ODNIESIENIE DANEGO EFEKTU DO SZCZEGÓŁOWYCH EFEKTÓW ZDEFINIOWANYCH DLA PROGRAMU	CELE PRZEDMIOTU	TREŚCI PROGRAMOWE	NARZĘDZIA DYDAKTYCZNE	SPOSOBY OCENY
EK1	K_W01 K_W03 K_W05 K_U05 K_U07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15 C1 C2 C3 C4 C5	N1 N2	P1 P2 P3
EK2	K_U01 K_U05 K_U07	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 W8 W9 W10 W11 W12 W13 W14 W15 C6 C7 C8 C9 C10 C11 C12 C13 C14 C15	N2 N3 N4	F1 F2 P3
EK3	K_W01 K_W03 K_W05 K_U05	Cel 2	W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24 C16 C17 C18 C19	N1 N3	P1 P2 P3
EK4	K_U05	Cel 2	W16 W17 W18 W19 W20 W21 W22 W23 W24 C20 C21 C22 C23 C24	N2 N3	F1 F2 P3

11 WYKAZ LITERATURY

LITERATURA PODSTAWOWA

- [1] | W. Kołodziej — *Analiza Matematyczna*, Warszawa, 1983, PWN
- [2] | L. M. Drużkowski — *Analiza Matematyczna dla Fizyków*, Kraków, 1997, Wyd. UJ
- [3] | W. Stankiewicz — *Zadania z Matematyki dla Wyższych Uczelni*, Warszawa, 1983, PWN

LITERATURA UZUPEŁNIAJĄCA

- [1] | M. Spivak — *Analiza Matematyczna na Rozmaiwościach*, Warszawa, 1977, PWN

12 INFORMACJE O NAUCZYCIELACH AKADEMICKICH

OSOBA ODPOWIEDZIALNA ZA KARTĘ

dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: imykytyuk@pk.edu.pl)

OSOBY PROWADZĄCE PRZEDMIOT

- 1 dr hab. Ihor Mykytyuk (kontakt: imykytyuk@pk.edu.pl)
- 2 dr Mariusz Jużyniec (kontakt: juzyniec@pk.edu.pl)
- 3 dr Magdalena Grzech (kontakt: magdalena.grzech@pk.edu.pl)

13 ZATWIERDZENIE KARTY PRZEDMIOTU DO REALIZACJI

(miejscowość, data)

(odpowiedzialny za przedmiot)

(dziekan)

PRZYJMUJĘ DO REALIZACJI (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

.....

.....

.....