Politechnika Krakowska
im. Tadeusza Kościuszki

Karta przedmiotu

obowiązuje studentów rozpoczynających studia w roku akademickim 2014/2015

Wydział Fizyki, Matematyki i Informatyki

Kierunek studiów: Matematyka — Profil: Ogólnoakademicki

Forma sudiów: stacjonarne — Kod kierunku: M

Stopień studiów: I

Specjalności: Matematyka w finansach i ekonomii

1 Informacje o przedmiocie

Nazwa przedmiotu	Wstęp do logiki i teorii mnogości
Nazwa przedmiotu w języku angielskim	Introduction to mathematical logic and set theory
Kod przedmiotu	WFMiI M oIS B2 14/15
Kategoria przedmiotu	Przedmioty podstawowe
Liczba punktów ECTS	6.00
Semestry	1

2 Rodzaj zajęć, liczba godzin w planie studiów

Semestr	Wykład	Ćwiczenia	Laboratorium	Laboratorium komputerowe	Seminarium	Projekt
1	30	30	0	0	0	0

3 Cele przedmiotu

Cel 1 Przedstawienie studentom matematyki jako teorii aksjmatycznej oraz pokazanie charakterysycznych dla teorii aksjomatycznych metod i narzędzi.

Cel 2 Nauczenie studentów podstawowych pojęć matematyki (abecadła matematycznego) oraz umiejętności prowadzenia dowodów i rozumowań.

4 Wymagania wstępne w zakresie wiedzy, umiejętności i innych kompetencji

1 Znajomość matematyki na poziomie podstawowym szkoły średniej.

5 Efekty kształcenia

EK1 Wiedza Student zna podstawowe metody dowodzenia twierdzeń. Student rozumienie rolę dowodu w matematyce. Student dostrzega strukturę twierdzenia matematycznego.

EK2 Umiejętności Student rozumie i umie przedstawić (w mowie i na piśmie) rozumowanie matematyczne. Student potrafi wskazać w twierdzeniu założenie i tezę. Umiejętność poprawnego formułowania definicji.

EK3 Umiejętności Sudent potrafi posługiwać się się rachunkiem kwantyfikatorów.

EK4 Wiedza Student zna podstawowe pojęcia teorii mnogości używane we wszystkich działach matematyki (np. relacja, funkcja, porządek, itp.).

EK5 Umiejętności Student rozumie zagadnienia związane z pojęciem mocy zbioru (przeliczalność, nieprzeliczalność) oraz porządku na zbiorze.

EK6 Umiejętności Student potrafi przeprowadzić dowód indukcyjny.

EK7 Kompetencje społeczne Student dostrzega ograniczenia własnej wiedzy i rozumie potrzebę dalszego kształcenia

6 Treści programowe

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W1	Zdanie w sensie logiki, paradoks kłamcy. Zdanie proste, spójniki logiczne, zadanie, wartościowanie zdań. Schematy wnioskowania. Formuła, kwantyfikatory, kwantyfikatory o ograniczonym zakresie, zmienna wolna i zmienna związana formuły, prawa rachunku kwantyfikatorów.	6
W2	Aksjomat ekstensjonalności, definicja inkluzji (zawierania). Suma, przecięcie (iloczyn), różnica i różnica symetryczna zbiorów, dopełnienie zbioru, własności działań na zbiorach. Nieskończone sumy i iloczyny zbiorów. Para uporządkowana, iloczyn kartezjański zbiorów.	6
W3	Relacja, funkcja, dziedzina, przeciwdziedzina funkcji, zbiór wartości, obraz elementu i zbioru, przeciwobraz elementu i zbioru, injekcja, surjekcja, bijekcja. Funkcja odwrotna.	2
W4	Relacje porządku częściowego, liniowego i dobrego. Element minimalny, element maksymalny, element najmniejszy, element największy, minoranta, majoranta, kres dolny, kres górny, Twierdzenie i monomorfizmach między zbiorami dobrze uporządkowanymi.	4
W5	Relacja równoważności, klasa abstrakcji.	2
W6	Definicja Peano zbioru liczb naturalnych, Zasada indukcji matematycznej, zasada minimum. Konstrukcje rekurencyjne. Konstrukcje zbiorów liczb całkowitych i wymiernych. Szkic konstrukcji zbioru liczb rzeczywistych (przekroje Dedekinda)	5

Wykład		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
W7	Równoliczność zbiorów. Twierdzenie Cantora-Bernsteina. Twierdzenie Cantora. Zbiór przeliczalny. Twierdzenia o mocy podzbioru zbioru przeliczalnego. Twierdzenie o najwyżej przeliczalnej sumie zbiorów przeliczalnych. Twierdzenie o mocy iloczynu kartezjańskiego skończenie wielu zbiorów przeliczalnych, metoda przekątniowa Cantora (nieprzeliczalność zbioru liczb rzeczywistych), definicja continuum.	5

Ćwiczenia		
Lp	Tematyka zajęć Opis szczegółowy bloków tematycznych	Liczba godzin
C1	Badanie poprawności wnioskowań. Sprawdzanie, czy zdanie jest tautologią, badanie własności spójników logicznych. Sprawdzanie poprawności schematów wnioskowania. Zapisywanie zdań języka naturalnego w języku formalnym. Rachunek kwantyfikatorów.	6
C2	Działania na zbiorach. Badanie własności iloczynu kartezjąńskiego.	6
C3	Badanie, czy relacja jest funkcją, sprawdzanie injektywności i surjektywności, wyznaczanie obrazów i przeciwobrazów. Wyznaczanie funkcji odwrotnej.	4
C4	Badanie, czy relacja jest porządkiem i jakim. Wyznaczanie elementów wyróżnionych.	4
C5	Badanie, czy relacja jest równoważnością. Wyznaczanie klas abstrakcji.	4
C6	Ćwiczenie poprawnego dowodzenia przez indukcje.	4
C7	Badanie, czy zbiór jest skończony, przeliczalny lub nieprzeliczalny.	2

7 Narzędzia dydaktyczne

N1 Wykłady

N2 Ćwiczenia audytoryjne

N3 e-learning (platforma Moodle)

8 Obciążenie pracą studenta

Forma aktywności	Średnia liczba godzin na zrealizowanie aktywności
Godziny kontaktowe z nauczycielem akademickim, w tym:	
Godziny wynikające z planu studiów	60
Konsultacje przedmiotowe	0
Egzaminy i zaliczenia w sesji	0
Godziny bez udziału nauczyciela akademickiego wynikające z nakładu pracy studenta, w tym:	
Przygotowanie się do zajęć, w tym studiowanie zalecanej literatury	120
Opracowanie wyników	0
Przygotowanie raportu, projektu, prezentacji, dyskusji	0
Sumaryczna liczba godzin dla przedmiotu wynikająca z całego nakładu pracy studenta	**180**
Sumaryczna liczba punktów ECTS dla przedmiotu	6.00

9 Sposoby oceny

Ocena formująca

F1 Kolokwium

F2 Odpowiedź ustna

Ocena podsumowująca

P1 Test

P2 Zaliczenie ustne

Kryteria oceny

Efekt kształcenia 1	
Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
Na ocenę 3.0	Student zna zasadę indukcji matematycznej oraz zna podstawowe tautologie oraz prawa rachunku kwantyfikatorów. Student zna najważniejsze twierdzenia przedstawione na wykładzie (twierdzenia o sumie i (skończonym) iloczynie kartezjańskim zbiorów przeliczalnych).

Na ocenę 3.5	Student zna materiał na ocenę 3 i ponadto umie podać zasady równoważne zasadzie indukcji matematycznej; rozumie, co oznacza równoważność zasady indukcji matematycznej i zasady minimum. Student zna podstawowe tautologie i prawa rachunku kwantyfikatorów oraz wie, jaki jest ich związek z prowadzeniem dowodów matematycznych.
Na ocenę 4.0	Student zna materiał na ocenę 3,5 i ponadto potrafi przedstawić dowody najważniejszych - z podanych na wykładzie - twierdzeń (tzn. dowód równoważności różnych wersji zasady indukcji matematycznej i zasady minimum, dowody twierdzeń dotyczących własności zbiorów przeliczalnych; metodę przekątniową Cantora itp.)
Na ocenę 4.5	Student zna materiał na ocenę 4 i ponadto rozumie zależność pomiędzy założeniem istnienia pewnych obiektów matematycznych i systemem przyjętych aksjomatów. Student zna dowody twierdzeń przedstawionych na wykładzie (w tym twierdzenia Cantora, twierdzenia Cantora-Bernsteina, twierdzeń dotyczących zależności pomiędzy zbiorami dobrze uporządkowanymi); zna zasady równoważne Lematowi Kuratowskiego-Zorna.
Na ocenę 5.0	Student zna materiał na ocenę 4,5 i ponadto potrafi wskazać, które aksjomaty gwarantują istnienie najważniejszych obiektów matematycznych (pary uporządkowanej, sumy zbiorów, iloczynu kartezjańskiego (skończonej liczby zbiorów i dowolnej rodziny zbiorów)).
Efekt kształcenia 2	
Na ocenę 2.0	Student nie potrafi prześledzić prostego dowodu.
Na ocenę 3.0	Student potrafi prześledzić i zrozumieć proste rozumowanie. Umie wskazać, co na danym etapie rozumowania jest założeniem, a co tezą. Umie przeprowadzić dowód indukcyjny.
Na ocenę 3.5	Student potrafi prześledzić i zrozumieć proste rozumowanie. Umie wskazać, co na danym etapie rozumowania jest założeniem, a co tezą. Umie przeprowadzić dowód indukcyjny. Ponadto potrafi wskazać regułę wnioskowania, która jest w danym momencie wykorzystywana.
Na ocenę 4.0	Student ma umiejętności konieczne do otrzymania oceny 3,5. Ponadto student potrafi samodzielnie przedstawić poznane rozumowanie; potrafi również samodzielnie wymyślić i przeprowadzić dowód prostego faktu (np. sprawdzić, czy dwa zbiory są równoliczne, czy pewna relacja ma żądane własności, co jest, a co nie jest prawem rachunku kwantyfikatorów itp.).
Na ocenę 4.5	Student ma umiejętności konieczne do otrzymania oceny 4. Student potrafi prześledzić dłuższe dowody i wskazać ich główną ideę.
Na ocenę 5.0	Student ma umiejętności konieczne do otrzymania oceny 4,5. Ponadto student potrafi wymyślić i poprawnie zapisać dowody prostych faktów (w zakresie poznanego materiału).
Efekt kształcenia 3	
Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych praw rachunku kwantyfikatorów.

Na ocenę 3.0	Student zna podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów oraz potrafi je stosować w prostych sytuacjach (np. napisać negacja formuły z kwantyfikatorami).
Na ocenę 3.5	Student zna podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów oraz potrafi je stosować w prostych sytuacjach. Student potrafi wskazać przykład pokazujący, że dany schemat wnioskowania nie jest poprawny.
Na ocenę 4.0	Student zna podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów oraz potrafi je stosować w prostych sytuacjach. Student potrafi rozstrzygnąć pokazując kontrprzykład lub przedstawiając uzasadnienie, czy dany schemat wnioskowania jest poprawny.
Na ocenę 4.5	Student zna podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów oraz potrafi je stosować w prostych sytuacjach. Student potrafi rozstrzygnąć pokazując kontrprzykład lub przedstawiając uzasadnienie, czy dany schemat wnioskowania jest poprawny. Student swobodnie stosuje prawa rachunku kwantyfikatorów w prowadzonych rozumowaniach.
Na ocenę 5.0	Student zna podstawowe prawa rachunku kwantyfikatorów oraz potrafi je stosować w prostych sytuacjach. Student potrafi rozstrzygnąć pokazując kontrprzykład lub przedstawiając uzasadnienie, czy dany schemat wnioskowania jest poprawny. Student swobodnie stosuje prawa rachunku kwantyfikatorów w prowadzonych rozumowaniach. Student potrafi przeanalizować prowadzony dowód pod kątem stosowania reguł wnioskowania.
Efekt kształcenia 4	
Na ocenę 2.0	Student nie zna podstawowych pojęć z zakresu przedstawionego na wykładach materiału.
Na ocenę 3.0	Student zna w dostatecznym stopniu podstawowe pojęcia z zakresu wyłożonego materiału tzn. wie, co to jest iloczyn kartezjański, relacja i funkcja (zna podstawowe typy relacji); zna zasadę indukcji matematycznej; wie, jaka jest różnica pomiędzy zbiorem przeliczalnym a nieprzeliczalnym; zna podstawowe tautologie oraz prawa rachunku kwantyfikatorów.
Na ocenę 3.5	Student zna materiał na ocenę 3 i ponadto potrafi podać formalne definicje sumy mnogościowej i przecięcia zbiorów, iloczynu kartezjańskiego dowolnej rodziny zbiorów; umie przedstawić przykłady relacji porządkujących (nie tylko zbiory liczbowe); wie, jak zdefiniować język formalny i formułę tego języka. Student zna paradoks Russella i rozumie konieczność ujęcia podstaw matematyki w system aksjomatów. Student zna aksjomat ekstensjonalności i wie, jak go stosować np. w przypadku badania równości funkcji.
Na ocenę 4.0	Student zna materiał na ocenę 3,5 i ponadto widzi zależności pomiędzy definicjami podstawowych obiektów matematycznych (potrafi pokazać kolejność ich pojawiania się i rozumie proces rozwoju teorii). Student potrafi podać przykłady zbiorów mocy continuum (i uzasadnić, że ich moc jest właśnie tyle równa); student potrafi wskazać twierdzenia (np. z algebry liniowej lub wstępu do analizy matematycznej), w których wykorzystywany jest Lemat Kuratowskiego-Zorna.
Na ocenę 4.5	Student zna materiał na ocenę 4 i potrafi podać definicje (wszystkich) pojęć, które pojawiły się na wykładzie; zna ich wzajemne zależności.

Na ocenę 5.0	Student zna materiał na ocenę 4,5 i potrafi przedstawić kolejność ich pojawiania się w matematyce (w teorii mnogości) wraz z informacją o ich zależności od przyjętych aksjomatów.
Efekt kształcenia 5	
Na ocenę 2.0	Student nie zna pojęcia zbioru przeliczalnego.
Na ocenę 3.0	Student umie zdefiniować zbiór przeliczalny i uzasadnić (wskazując bijekcję lub dwie iniekcje), że dany zbiór jest przeliczalny.
Na ocenę 3.5	Student umie zdefiniować zbiór przeliczalny i uzasadnić (wskazując bijekcję lub dwie iniekcje), że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi wykorzystać twierdzenia o sumie i iloczynie kartezjańskim zbiorów przeliczalnych do uzasadnienia, że dany zbiór jest przeliczalny.
Na ocenę 4.0	Student umie zdefiniować zbiór przeliczalny i uzasadnić (wskazując bijekcję lub dwie iniekcje), że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi wykorzystać twierdzenia o sumie i iloczynie kartezjańskim zbiorów przeliczalnych do uzasadnienia, że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi uzasadnić, że badany zbiór nie jest przeliczalny (korzystając np. z twierdzenia Cantora lub zanurzając weń zbiór liczb rzeczywistych).
Na ocenę 4.5	Student umie zdefiniować zbiór przeliczalny i uzasadnić (wskazując bijekcję lub dwie iniekcje), że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi wykorzystać twierdzenia o sumie i iloczynie kartezjańskim zbiorów przeliczalnych do uzasadnienia, że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi rozstrzygnąć, czy badany zbiór nie jest przeliczalny (korzystając np. z twierdzenia Cantora lub zanurzając weń zbiór liczb rzeczywistych). Potrafi wskazać zbiory nieprzeliczalne, których moc jest równa continuum.
Na ocenę 5.0	Student umie zdefiniować zbiór przeliczalny i uzasadnić (wskazując bijekcję lub dwie iniekcje), że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi wykorzystać twierdzenia o sumie i iloczynie kartezjańskim zbiorów przeliczalnych do uzasadnienia, że dany zbiór jest przeliczalny. Student potrafi rozstrzygnąć, czy badany zbiór nie jest przeliczalny (korzystając np. z twierdzenia Cantora lub zanurzając weń zbiór liczb rzeczywistych). Potrafi sprawdzić, czy moc zbioru nieprzeliczalnego, jest równa continuum.
Efekt kształcenia 6	
Na ocenę 2.0	Student nie umie wypowiedzieć zasady indukcji matematycznej.
Na ocenę 3.0	Student umie wypowiedzieć zasadę indukcji matematycznej. Umie poprawnie zapisać jej założenia dla konkretnej formuły, której dowodzi. Potrafi zapisać definicję indukcyjną.
Na ocenę 3.5	Student umie wypowiedzieć zasadę indukcji matematycznej. Umie poprawnie zapisać jej założenia dla konkretnej formuły, której dowodzi oraz sprawdzić (w prostych przypadkach), czy są spełnione. Rozumie strukturę kroku następnika. Potrafi zapisać definicję indukcyjną i skorzystać z niej (w prostych przypadkach).

Na ocenę 4.0	Student umie wypowiedzieć zasadę indukcji matematycznej. Umie poprawnie zapisać jej założenia dla konkretnej formuły, której dowodzi oraz sprawdzić, czy są spełnione. Rozumie strukturę kroku następnika. Potrafi zapisać definicję indukcyjną, rozumie jej mechanizm oraz potrafi z niej korzystać.
Na ocenę 4.5	Student umie wypowiedzieć zasadę indukcji matematycznej. Umie poprawnie zapisać jej założenia dla konkretnej formuły, której dowodzi oraz sprawdzić, czy są spełnione. Rozumie strukturę kroku następnika. Potrafi zapisać definicję indukcyjną, rozumie jej mechanizm oraz potrafi z niej korzystać. Student potrafi przeprowadzać bardziej skomplikowane konstrukcje indukcyjne (np. zbioru Cantora, dywanu Sierpińskiego itp.).
Na ocenę 5.0	Student umie wypowiedzieć zasadę indukcji matematycznej. Umie poprawnie zapisać jej założenia dla konkretnej formuły, której dowodzi oraz sprawdzić, czy są spełnione. Rozumie strukturę kroku następnika. Potrafi zapisać definicję indukcyjną, rozumie jej mechanizm oraz potrafi z niej korzystać. Student potrafi przeprowadzać bardziej skomplikowane konstrukcje indukcyjne (np. zbioru Cantora, dywanu Sierpińskiego itp.). Student potrafi samodzielnie przeprowadzić konstrukcję indukcyjną (np. zdefiniować ciąg indukcyjnie ciąg przybliżeń liczby rzeczywistej itp.).
Efekt kształcenia 7	
Na ocenę 2.0	Student nie rozumie konieczności podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań.
Na ocenę 3.0	Student rozumie konieczność podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań; student rozumie, czym jest teoria aksjomatyczna.
Na ocenę 3.5	Student rozumie konieczność podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań; student rozumie, czym jest teoria aksjomatyczna. Student potrafi wskazać, co jest założeniem, a co tezą; które pojęcie definiujemy, a którego używamy w członie definiującym.
Na ocenę 4.0	Student rozumie konieczność podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań; student rozumie, czym jest teoria aksjomatyczna. Student potrafi wskazać, co jest założeniem, a co tezą; które pojęcie definiujemy, a którego używamy w członie definiującym. Student rozumie konieczność wprowadzenia aksjomatów.
Na ocenę 4.5	Student rozumie konieczność podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań; student rozumie, czym jest teoria aksjomatyczna. Student potrafi wskazać, co jest założeniem, a co tezą; które pojęcie definiujemy, a którego używamy w członie definiującym. Student potrafi przeprowadzić analizę rozumowania i wskazać ewentualne braki. Student rozumie konieczność wprowadzenia aksjomatów.
Na ocenę 5.0	Student rozumie konieczność podawania formalnych i ścisłych definicji oraz prowadzenia rozumowań; student rozumie, czym jest teoria aksjomatyczna. Student potrafi wskazać, co jest założeniem, a co tezą; które pojęcie definiujemy, a którego używamy w członie definiującym. Student potrafi przeprowadzić analizę rozumowania i wskazać ewentualne braki. Student rozumie konieczność wprowadzenia aksjomatów. Student rozumie, dlaczego analiza dowodów jest ważnym narzędziem poznawania danej teorii matematycznej.

10 Macierz realizacji przedmiotu

Efekt kształcenia	Odniesienie danego efektu do szczegółowych efektów zdefiniowanych dla programu	Cele przedmiotu	Treści programowe	Narzędzia dydaktyczne	Sposoby oceny
EK1		Cel 1	W1 C1	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK2		Cel 1	W1 C1	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK3		Cel 1	W1 C1	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK4		Cel 2	W2 W3 W4 W5 C2 C3 C4 C5	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK5		Cel 2	W7 C7	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK6		Cel 2	W6 C6	N1 N2 N3	F1 F2 P1 P2
EK7	K_K01	Cel 1	W1 W2 W3 W4 W5 W6 W7 C1 C2 C3 C4 C5 C6 C7	N1	F2 P2

11 Wykaz literatury

Literatura podstawowa

[1] **H. Rasiowa** — *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa, 2004, PWN

[2] **K. Kuratowski** — *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa, 2004, PWN

[3] **W. Marek, J. Onyszkiewicz** — *Elementy logiki i teorii mnogości w zadaniach*, Warszawa, 2004, PWN

[4] **W. Guzicki, P. Zakrzewski** — *Wykłady ze wstępu do matematyki*, Warszawa, 2005, PWN

[5] **W. Guzicki, P. Zakrzewski** — *Wstęp do matematyki. Zbiór zadań*, Warszawa, 2005, PWN

[6] **J. Cichoń** — *Wykłady ze wstępu do matematyki*, Wrocław, 2003, Dolnośląskie Wydwnictwo Edukacyjne

[7] **Z. Adamowicz, P. Zbierski** — *Logika matematyczna*, Warszawa, 1991, PWN

[8] **K.A. Ross, C.R.B. Wright** — *Matematyka dyskretna*, Warszawa, 2006, PWN

Literatura uzupełniająca

[1] **T. Jech** — *Set theory*, Berlin, 2005, Springer

[2] **K. Devlin** — *The joy of sets. Fundamentals of contemporary set theory.*, Berlin, 1993, Springer

12 Informacje o nauczycielach akademickich

Osoba odpowiedzialna za kartę

dr Magdalena Grzech (kontakt: magdag@pk.edu.pl)

Osoby prowadzące przedmiot

1 dr Beata Strycharz-Szemberg (kontakt: szemberg@pk.edu.pl)

2 dr Magdalena Grzech (kontakt: smgrzech@cyf-kr.edu.pl)

13 Zatwierdzenie karty przedmiotu do realizacji

(miejscowość, data)	(odpowiedzialny za przedmiot)	(dziekan)

Przyjmuję do realizacji (data i podpisy osób prowadzących przedmiot)

. . . .

. . . .